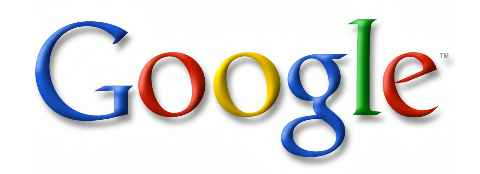




THÉORIE

DES

FONCTIONS ABÉLIENNES.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ABÉLIENNES,

PAR M. CH. BRIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

—

1879

PRÉFACE.

Riemann a le premier traité la question des fonctions abéliennes, et il a trouvé de très-beaux théorèmes relatifs à cette nouvelle classe de fonctions; mais la méthode qu'il a suivie présente de grandes difficultés et ne paraît pas susceptible d'acquérir le degré de clarté et de rigueur que l'on recherche dans les Sciences mathématiques.

Plus tard, MM. Clebsch et Gordan ont publié sur le même sujet un livre fort remarquable par la simplicité et l'élégance de la méthode; mais ils se sont bornés à un cas tout particulier, celui où l'équation proposée n'admet que des points critiques du second ordre, c'est-à-dire des points où deux racines seulement deviennent égales.

J'ai repris la question telle que l'a posée Riemann, et j'ai essayé de la résoudre dans toute sa généralité, quels que soient l'ordre des points critiques, leur distribution dans le plan, et la loi de permutation des racines autour de ces points.

Dans la première Partie, qui se rapporte à l'étude des intégrales abéliennes de première espèce, j'ai suivi la même marche que MM. Clebsch et Gordan. Toutefois, j'ai laissé de côté les considérations géométriques sur les points singuliers des courbes algébriques, dont ils font usage, considérations qui peuvent

convenir à certains cas particuliers, mais qui ne se prêtent que difficilement à l'établissement de lois générales.

Dans la seconde Partie, qui a pour objet principal l'intégration des équations différentielles abéliennes, j'ai suivi une marche toute différente : après avoir démontré l'existence des fonctions intégrales, j'ai étudié les propriétés de la fonction Θ, dont les arguments sont les intégrales abéliennes de première espèce; la résolution du problème de l'inversion, ou l'intégration des équations différentielles, s'en déduit immédiatement.

Ce Volume peut être considéré comme la suite de celui que nous avons publié, M. Bouquet et moi, il y a plusieurs années, sous le titre de *Théorie des fonctions elliptiques,* et qui contient les principes d'une théorie générale des fonctions analytiques. J'ai appliqué les mêmes principes à l'étude des fonctions abéliennes. J'ai cru utile de les réunir et de les résumer en quelques pages, afin de les préciser davantage, et d'en faire mieux comprendre l'ordre et le rigoureux enchaînement.

INTRODUCTION.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Définitions.

1. On appelle *quantité imaginaire* une expression de la forme $x+y\sqrt{-1}$, dans laquelle x et y sont des quantités réelles, positives ou négatives.

Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires, on figure la quantité imaginaire $z=x+y\sqrt{-1}$ par le point z, dont les coordonnées sont x et y. On dit que la quantité imaginaire varie d'une manière continue, lorsque les deux quantités réelles x et y qui la composent varient d'une manière continue. Cette variation est figurée par la ligne que décrit le point z dans le plan.

2. Lorsque deux variables imaginaires z et u sont liées entre elles, de telle sorte que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre, on dit que les deux quantités sont *fonctions* l'une de l'autre. On dira, par exemple, que u est fonction de z, et l'on indiquera cette dépendance par la notation habituelle

$$u=f(z).$$

3. Lorsqu'on peut assigner un nombre ρ tel que, pour tout point z' situé dans le cercle décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à ρ, le module de la différence $f(z')-f(z)$ soit moindre qu'un nombre donné, si petit qu'il soit, on dit que la fonction est *continue* dans le voisinage du point z.

On dit qu'une fonction est continue dans une certaine partie du plan, lorsqu'elle est continue dans le voisinage de chacun des points situés dans cette partie du plan.

4. Soient z et z' deux points voisins situés dans la partie du plan considérée; si le rapport

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

tend vers une limite, lorsque le point z' se rapproche indéfiniment du point z, et si cette limite est la même quel que soit le chemin suivi par le point z' pour arriver au point z, on dit que la fonction $f(z)$ admet *une dérivée* au point z, et l'on représente cette dérivée par la notation $f'(z)$.

Cela signifie que l'on peut assigner un nombre ρ' tel que, pour tous les points z' situés dans le cercle décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à ρ', le module de la différence

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-f'(z)$$

soit moindre qu'un nombre donné.

5. Soit $u=X+Y\sqrt{-1}$, X et Y étant des fonctions réelles des deux variables réelles et indépendantes x et y. Si la fonction u est continue dans une certaine partie du plan, les deux fonctions réelles X et Y sont des fonctions continues dans la même étendue.

Laissant y constante, faisons varier x; nous aurons

$$\Delta z=\Delta x,\quad \frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\Delta X}{\Delta x}+\frac{\Delta Y}{\Delta x}\sqrt{-1};$$

si le premier rapport tend vers une limite quand Δx tend vers zéro, les deux autres rapports tendent respectivement vers des limites déterminées. On en conclut que les deux fonctions réelles X et Y admettent des dérivées partielles par rapport à x.

Laissant x constante, faisons maintenant varier y; nous aurons

$$\Delta z = \Delta y \sqrt{-1}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta Y}{\Delta y} - \frac{\Delta X}{\Delta y}\sqrt{-1};$$

on en conclut de même que les deux fonctions réelles X et Y admettent des dérivées partielles par rapport à y.

Si la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ est la même dans les deux cas, ces dérivées partielles satisfont aux deux relations

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Quand la fonction proposée $f(z)$, continue dans une partie du plan, admet une dérivée en chaque point, cette dérivée $f'(z)$ est une nouvelle fonction de la variable imaginaire z. Si elle est continue comme la fonction proposée, les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ sont, dans la même étendue, des fonctions continues des deux variables réelles x et y, et elles satisfont aux deux relations précédentes.

6. J'appellerai *fonction analytique* d'une variable imaginaire une fonction dont chaque branche est continue et admet *une* dérivée elle-même continue, excepté en certains points *singuliers*. Je reprends une dénomination employée par Lagrange, en l'étendant aux fonctions des variables imaginaires.

7. Supposons que le point z soit astreint à rester dans une partie déterminée du plan; si tous les chemins qui vont d'un point initial z_0 à un point quelconque z situé dans cette partie du plan conduisent à la même valeur de la fonction, nous disons que la fonction est *monotrope* dans cette partie du plan. Il est évident, dans ce cas, que, si le point mobile décrit une courbe fermée, située dans la partie du plan considérée, la fonction reprend sa valeur primitive.

8. Lorsque, dans une partie du plan, une fonction est continue, monotrope, et admet une dérivée elle-même continue, nous disons

que la fonction est *holomorphe* dans cette partie du plan. Nous indiquons par cette dénomination qu'elle est semblable aux fonctions entières, qui jouissent de cette propriété dans toute l'étendue du plan.

On peut dire, d'une manière générale, que les points singuliers d'une fonction analytique sont les points où l'une des branches de la fonction cesse d'être holomorphe.

9. Lorsqu'une fonction u est holomorphe dans une partie du plan, excepté en un point où elle devient infinie, de manière toutefois que la fonction $\frac{1}{u}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point, on dit que ce point est un *pôle* de la fonction u. Une fraction rationnelle admet comme pôles les racines du dénominateur.

Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan, excepté en certains pôles, nous disons qu'elle est *méromorphe* dans cette partie du plan, c'est-à-dire semblable aux fractions rationnelles.

10. On appelle *point critique* un point tel que, si la variable tourne autour de ce point, la fonction acquiert en un point voisin plusieurs valeurs différentes. Quand la variable s'éloigne ensuite du point critique, ces diverses valeurs engendrent par la continuité les *branches* de la fonction.

Si les diverses valeurs qu'acquiert une fonction autour d'un point critique sont en nombre fini, et, dans ce cas, elles se reproduisent circulairement, et si, en outre, elles diffèrent infiniment peu d'une même valeur limite, le point critique est dit *algébrique*.

Si la fonction u devient infinie au point critique, mais de telle sorte que la fonction $\frac{1}{u}$ acquière dans le voisinage de ce point un nombre fini de valeurs infiniment peu différentes de zéro, on regardera encore ce point comme un point critique algébrique de la fonction u.

Les pôles et les points critiques algébriques forment une première classe de points singuliers, que nous appelons *points singuliers algébriques*, parce qu'on ne rencontre que ces deux sortes de points singuliers dans l'étude des fonctions algébriques (¹).

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2ᵉ édit., p. 50

Comme exemples de points singuliers transcendants, nous citerons le point critique *logarithmique* $z = z_1$ de la fonction $\log(z - z_1)$ (1) et le point d'*indétermination* $z = z_1$ de la fonction $e^{\frac{1}{z-z_1}}$ (2).

11. Pour étudier la variation d'une fonction, quand la variable z devient très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$, et l'on donne à la nouvelle variable z' des valeurs voisines de zéro. Si l'on figure la marche de la variable par le mouvement d'un point sur la sphère (3), cette transformation revient à l'étude de la fonction dans le voisinage du point O', diamétralement opposé au point O qui correspond à $z = 0$.

L'emploi de la sphère est utile, lorsque le point O' est un point ordinaire, un pôle, ou un point critique algébrique; mais ce mode de représentation ne convient pas pour les fonctions périodiques. En ce qui concerne les fonctions doublement périodiques, par exemple, le plan est divisé en un réseau de parallélogrammes égaux, aux points homologues desquels la fonction reprend la même valeur (4); sur la sphère cette régularité disparaît, et le point O', ou $z = \infty$, devient un point d'indétermination, dans le voisinage duquel la fonction acquiert toutes les valeurs possibles.

Des intégrales définies.

12. Pour définir l'intégrale

$$\int f(z)\,dz,$$

relative à une ligne $z_0\zeta$ tracée dans le plan, il suffit de supposer que la fonction $f(z)$ est continue sur cette ligne. Prenons sur la ligne un certain nombre de points intermédiaires $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$, et considérons la somme

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{m-1})(\zeta - z_{m-1}).$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, par MM. Briot et Bouquet, 2e édit., p. 96.
(2) *Ibid.*, p. 94.
(3) *Ibid.*, p. 15.
(4) *Ibid.*, p. 119.

Soient

$$z_0 = x_0 + y_0\sqrt{-1},$$
$$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1},$$

et supposons, pour fixer les idées, que, lorsque le point z décrit la ligne $z_0\zeta$, x croisse de x_0 à ξ et y de y_0 à η, de manière à avoir deux suites de quantités réelles croissantes

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{m-1},\ \xi,$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{m-1},\ \eta.$$

Si l'on pose

$$f(z_n) = X_n + Y_n\sqrt{-1},$$

un terme quelconque de la somme devient

$$\begin{aligned} f(z_n)(z_{n+1} - z_n) = {} & [X_n(x_{n+1} - x_n) - Y_n(y_{n+1} - y_n)] \\ & + [Y_n(x_{n+1} - x_n) + X_n(y_{n+1} - y_n)]\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Quand on augmente indéfiniment le nombre des divisions, de manière que toutes les différences $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$ tendent vers zéro, les quatre sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} X_n(x_{n+1} - x_n), \quad \sum_{n=0}^{n=m-1} Y_n(y_{n+1} - y_n),$$
$$\sum_{n=0}^{n=m-1} Y_n(x_{n+1} - x_n), \quad \sum_{n=0}^{n=m-1} X_n(y_{n+1} - y_n),$$

tendent vers des limites déterminées, qui sont les intégrales définies réelles

$$\int_{x_0}^{\xi} X\,dx, \quad \int_{y_0}^{\eta} Y\,dy, \quad \int_{x_0}^{\xi} Y\,dx, \quad \int_{y_0}^{\eta} X\,dy.$$

La somme

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} f(z_n)(z_{n+1} - z_n)$$

tend donc vers une limite déterminée; cette limite est ce que Cauchy appelle l'intégrale définie relative à la ligne $z_0\zeta$. On a ainsi

$$(1) \qquad \int f(z)\,dz = \int (X\,dx - Y\,dy) + \sqrt{-1}\int (Y\,dx + X\,dy),$$

toutes ces intégrales se rapportant à la même ligne $z_0\zeta$.

13. Lorsqu'une portion du plan est limitée par une seule ligne fermée et continue, on dit qu'elle est à *contour simple;* si elle est limitée par plusieurs lignes distinctes, on dit qu'elle est à *contour complexe* ([1]).

La démonstration du théorème fondamental de Cauchy résulte immédiatement d'une formule de Green, relative à la transformation d'une intégrale double en intégrale simple, et qui consiste en ceci : si deux fonctions réelles U et V des deux variables réelles x et y sont continues, monotropes, et ont des dérivées partielles continues, dans une partie du plan à contour simple, on a

$$\int\int\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = \int (U\,dx + V\,dy),$$

l'intégrale double s'étendant à la partie du plan limitée par une courbe intérieure infiniment voisine du contour de l'aire, et l'intégrale simple se rapportant à cette courbe décrite dans le sens positif ([2]) (*voir* la Note A à la fin du Volume).

Nous avons vu, en effet, que, lorsqu'une fonction analytique

$$f(z) = X + Y\sqrt{-1}$$

de la variable imaginaire z est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, les deux fonctions réelles X et Y sont continues dans la même étendue, et admettent des dérivées partielles continues et

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 128.

([2]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 20.

satisfaisant aux relations

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

En vertu de la formule précédente, on a

$$\int (X\,dx - Y\,dy) = -\int\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$
$$\int (Y\,dx + X\,dy) = \int\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

les intégrales simples se rapportant à une courbe fermée intérieure, décrite dans le sens positif, et les intégrales doubles à l'aire enveloppée par cette courbe. On en conclut, d'après la formule (1), que l'intégrale définie

$$\int f(z)\,dz,$$

relative à une courbe fermée quelconque, située dans la partie du plan considérée, est nulle.

14. Il en résulte que les intégrales définies

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

relatives aux différentes lignes qui vont d'un point z_0 à un autre z, dans la partie du plan considérée, sont égales [1]. On peut regarder cette intégrale comme une nouvelle fonction analytique de la variable z, holomorphe dans la même étendue.

Nous remarquons d'abord que, d'après ce que nous venons de dire, la fonction $\varphi(z)$ est monotrope. Elle est continue, car on a [2]

$$\varphi(z') - \varphi(z) = \int_{z}^{z'} f(\zeta)\,d\zeta.$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 133.
(2) *Ibid.*, p. 134.

Cette dernière intégrale étant indépendante de la ligne qui va du point z au point voisin z', on peut l'évaluer suivant la droite zz'; si l'on appelle M le maximum du module de la fonction $f(\zeta)$ sur la droite zz' et ρ la longueur de cette droite, le module de cette intégrale est moindre que $M\rho$.

Il reste à faire voir que la fonction $\varphi(z)$ a *une* dérivée. Si l'on pose $f(\zeta)=f(z)+\varepsilon$, on a

$$\int_z^{z'} f(\zeta)\,d\zeta = f(z)(z'-z)+\int_z^{z'}\varepsilon\,d\zeta,$$

et par suite

$$\frac{\varphi(z')-\varphi(z)}{z'-z}=f(z)+\frac{1}{z'-z}\int_z^{z'}\varepsilon\,d\zeta;$$

le dernier terme ayant un module moindre que le maximum du module de la quantité infiniment petite ε sur la droite zz', il est clair que le premier membre tend vers une limite égale à $f(z)$, quand le point z' se rapproche indéfiniment du point z, d'une manière quelconque. La fonction continue $\varphi(z)$, ayant une dérivée continue $f(z)$, est holomorphe.

15. Du théorème de Cauchy on déduit une formule importante qui donne l'expression d'une fonction holomorphe par une intégrale définie. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, et si l'on désigne par t un point quelconque situé dans cette partie du plan, on a, en effet,

$$(2)\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

l'intégrale étant prise, dans le sens positif, sur le contour de l'aire ou sur une courbe intérieure infiniment voisine [1].

Il en résulte que, si deux fonctions, holomorphes dans une même partie du plan, sont égales sur le contour de l'aire, elles sont égales dans tout l'intérieur. La connaissance des valeurs de la fonction sur

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 136.

le contour détermine donc complétement la fonction dans l'aire enveloppée.

16. On conclut aussi de cette formule que, lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan, sa dérivée est holomorphe dans la même étendue ([1]), et par suite que la fonction admet une infinité de dérivées successives, qui sont toutes holomorphes dans la même étendue ([2]).

17. Le développement d'une fonction holomorphe en une série entière se déduit de la même formule. On démontre que, lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine comme centre, elle est développable en une *série entière*, c'est-à-dire en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable, et convergente dans ce cercle ([3]).

Plus généralement, lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit du point z_0 comme centre, elle est développable en une série entière, ordonnée suivant les puissances de $z - z_0$, et convergente dans ce cercle ([4]).

18. La démonstration du théorème de Cauchy (nº 13) suppose seulement que, dans la partie du plan considérée, les fonctions réelles X et Y des deux variables réelles x et y sont continues, et admettent des dérivées partielles continues et satisfaisant aux deux relations

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

qui expriment que le rapport

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

tend vers la même limite, pour deux déplacements de la variable parallèles aux axes des coordonnées (nº 5).

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 137.
([2]) *Ibid.*, p. 139.
([3]) *Ibid.*, p. 149.
([4]) *Ibid.*, p. 152.

Quand ces conditions sont remplies, il résulte de la formule (2), qui est une conséquence du théorème de Cauchy, que ce rapport tend vers la même limite, quelle que soit la direction du déplacement, et, par conséquent, que la fonction est holomorphe.

19. Nous avons appelé *fonction analytique* (n° **6**) une fonction dont chaque branche est holomorphe, excepté en certains points singuliers. Si, dans une partie finie du plan, la fonction analytique $f(z)$ est monotrope et continue en tous les points sans exception, il est impossible qu'en un nombre fini de points elle cesse d'avoir une dérivée, ou que la dérivée éprouve une discontinuité quelconque. Remarquons d'abord que le théorème de Cauchy subsisterait encore, quand même la dérivée cesserait d'exister, ou deviendrait discontinue, en un nombre fini de points α, β, γ, ..., situés dans la partie du plan considérée; car, en décrivant des petits cercles autour de ces points et les joignant au contour par des transversales, on formerait un contour simple enveloppant une partie du plan dans laquelle la fonction est holomorphe. L'intégrale sur le contour entier est nulle. Les transversales, étant décrites chacune deux fois dans des sens contraires, donnent un résultat nul; la fonction $f(z)$ étant supposée finie en tous les points, les petits cercles donnent des quantités infiniment petites et par conséquent nulles; il en résulte que l'intégrale relative au contour primitif est nulle. Remarquons ensuite que, pour établir la formule (2) du n° **15**, il n'est pas nécessaire d'admettre qu'au point t la fonction admette une dérivée, ou que la dérivée soit continue; il suffit que la fonction $f(z)$ soit continue dans le voisinage de ce point [1]. Cette formule représente donc la fonction dans toute la partie considérée du plan, sans exception, et, par conséquent, la fonction admet une dérivée en chaque point, et cette dérivée est continue.

Propriétés fondamentales des fonctions analytiques.

20. A l'aide du développement en série entière, on démontre aisé-

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 137.

ment que, lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie finie du plan, chaque racine est d'un degré entier et fini, et que leur nombre est limité ([1]).

De même, lorsqu'une fonction est méromorphe dans une partie finie du plan, les racines et les pôles situés dans cette partie du plan sont chacun d'un degré entier et fini, et leur nombre est limité ([2]).

21. On établit ensuite les théorèmes suivants, qui jouent un rôle important dans la théorie des fonctions :

Théorème I. — *Une fonction, holomorphe sur toute la sphère, est constante* ([3]).

Théorème II. — *Toute fonction, holomorphe sur toute la sphère, excepté au point* O', *qu'elle admet comme pôle, est une fonction entière* ([4]).

Théorème III. — *Toute fonction, méromorphe sur toute la sphère, est une fonction rationnelle* ([5]).

Théorème IV. — *Toute fonction analytique qui, sur toute la sphère, n'a pas de points singuliers autres que des points singuliers algébriques, c'est-à-dire des pôles ou des points critiques algébriques, et qui n'admet qu'un nombre fini m de valeurs en chaque point, est une fonction algébrique* ([6]).

On remarque, en effet, que, si autour d'un point critique la fonction acquiert p valeurs infiniment peu différentes d'une même valeur limite, toute fonction entière et symétrique de ces p valeurs est une fonction monotrope et continue dans le voisinage du point critique. D'autre part, chacune des branches de la fonction ayant une dérivée continue dans le voisinage du point critique, la fonction symétrique admet elle-même une dérivée continue; d'après la remarque du n° 19, cette

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 188.
([2]) *Ibid.*, p. 191.
([3]) *Ibid.*, p. 204.
([4]) *Ibid.*, p. 205.
([5]) *Ibid.*, p. 206.
([6]) *Ibid.*, p. 216.

fonction admet aussi une dérivée au point critique, et cette dérivée est continue. D'après cela, toute fonction entière et symétrique des m valeurs de la fonction proposée est une fonction méromorphe sur toute la sphère, et, par conséquent, égale à une fonction rationnelle. La fonction proposée est donc racine d'une équation algébrique de degré m, ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de la variable.

22. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et irréductible entre les deux variables imaginaires x et y, et du degré m par rapport à y. Lorsque la variable x part d'un point fixe x_0, y ayant une valeur initiale y_0, et décrit différents chemins qui aboutissent à un même point x, la fonction algébrique y acquiert m valeurs en ce point. Nous associerons à la variable x la valeur correspondante de y sur chaque courbe et nous regarderons le point géométrique x comme la superposition de m points (x, y). Nous dirons que deux courbes décrites par le point (x, y) se coupent, lorsqu'au point d'intersection des deux courbes géométriques qui figurent la variation de x la valeur de y est la même. Le point (x, y) décrit une courbe fermée, ou un *cycle*, lorsque la valeur de y redevient la même au point de départ [1].

23. Il est clair, d'après le théorème IV, que toute fonction analytique et monotrope du point (x, y), et qui, sur toute la sphère relative à la variable x, n'admet pas de points singuliers autres que des points singuliers algébriques, est une fonction algébrique de x; on démontre qu'elle est égale à une fonction rationnelle de x et de y (Note B).

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 661.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ABÉLIENNES.

PREMIÈRE PARTIE.

INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION ET NOMBRE DES INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Formation des intégrales.

1. Étant donnée une équation algébrique, du degré m et irréductible,

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

on sait que, par une substitution du premier degré, les intégrales abéliennes se mettent sous la forme

$$V = \int \frac{\psi(x, y)}{F'_y} dx,$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y. Grâce à cette substitution, on peut supposer que l'équation (1) contient un terme du degré m par rapport à y, de manière que la fonction algébrique y conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de la variable x;

on peut supposer aussi que, pour $x = \infty$, le rapport $\frac{y}{x}$ a m valeurs finies et distinctes, de manière que l'intégrale reste finie dans le voisinage du point $x = \infty$ sur la sphère [1].

Les intégrales abéliennes se ramènent à trois espèces d'intégrales; celles de première espèce sont de la forme

$$V = \int \frac{Q(x,y)}{F'_y}\, dx, \tag{2}$$

$Q(x,y)$ étant un polynôme entier du degré $m-3$ en x et y, et tel que l'intégrale conserve une valeur finie sur toute la surface de la sphère. Nous nous proposons d'abord de former les intégrales de première espèce et de trouver leur nombre. Cette question a été traitée par M. Elliot dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences en 1875 [2]; nous suivrons la marche adoptée par M. Elliot.

Première transformation.

2. L'intégrale ne peut devenir infinie qu'aux points où la dérivée F'_y s'annule; ce sont les points critiques de la fonction algébrique y de x. Supposons que, pour $x = a$, l'équation admette n racines égales à b; transportons l'origine au point critique (a, b), c'est-à-dire remplaçons x et y par $a + x$ et $b + y$, et représentons l'équation proposée par

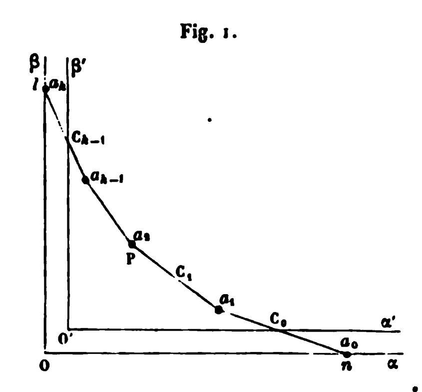
$$F(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta = 0. \tag{3}$$

A une valeur infiniment petite de x correspondent n valeurs infiniment petites de y. Ces n racines se partagent en groupes de racines du même degré et les racines d'un même groupe forment un ou plusieurs systèmes circulaires. On effectuera cette séparation par la méthode de M. Puiseux [3]. Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires $O\alpha$ et $O\beta$, et marqué les points qui ont pour coordonnées les

(1) BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2e édition. In-4°; 1875, p. 661.
(2) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV; 1875.
(3) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 42.

exposants α et β de y et x dans les différents termes de l'équation (3), on formera la ligne brisée convexe P (*fig.* 1), dont les côtés succes-

Fig. 1.



sifs C_0, C_1, ..., C_{h-1} passent par plusieurs de ces points, et qui laisse au-dessus d'elle tous les autres points. Le premier côté C_0 part du point n situé sur l'axe $O\alpha$ et le dernier C_{h-1} aboutit à un point l situé sur l'axe $O\beta$. Au côté C_i allant du sommet a_i au sommet a_{i+1} correspond une manière de former le groupe des termes du moindre degré dans l'équation; soit

$$A_{\alpha_i\beta_i} y^{\alpha_i} x^{\beta_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} y^{\alpha} x^{\beta} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} y^{\alpha_{i+1}} x^{\beta_{i+1}}$$

ce premier groupe, ordonné suivant les puissances décroissantes de y. En désignant par μ le degré de y par rapport à x, on a

$$\alpha_i \mu + \beta_i = \alpha\mu + \beta = \alpha_{i+1}\mu + \beta_{i+1};$$

d'où

$$\mu = \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} = \frac{\beta - \beta_i}{\alpha_i - \alpha} = \frac{q}{p},$$

les deux nombres entiers p et q étant premiers entre eux, et par suite

$$\alpha_i - \alpha_{i+1} = k_i p, \quad \beta_{i+1} - \beta_i = k_i q,$$
$$\alpha_i - \alpha \quad = kp, \quad \beta \quad - \beta_i = kq,$$

k et k_i étant des nombres entiers.

Si l'on pose

$$x = x'^p, \quad y = v x^{\mu} = v x'^q, \quad v^p = \lambda,$$

et

$$(4)\qquad \Phi(v) = A_{\alpha_i\beta_i} v^{\alpha_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} v^{\alpha_{i+1}} = v^{\alpha_{i+1}} L_i,$$

$$(5)\qquad L_i = A_{\alpha_i\beta_i} \lambda^{k_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} \lambda^{k_i - k} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}},$$

on a

$$(6)\qquad F(x, y) = x^{\alpha_i \mu + \beta_i}[\Phi(v) + x' \Psi(x', v)] = x^{\alpha_i\mu+\beta_i} \mathfrak{F}(x', v),$$

$\Psi(x', v)$ étant un polynôme entier en x' et v, et l'équation (3) devient

$$(7)\qquad \mathfrak{F}(x', v) = \Phi(v) + x' \Psi(x', v) = 0.$$

Soit λ une racine simple de l'équation $L_i = 0$, et $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les racines de l'équation binôme $v^p = \lambda$; pour $x' = 0$, l'équation (7), qui se réduit à $\Phi(v) = 0$, admet les p racines simples $v_1, v_2, \ldots, v_p$; on en conclut que l'équation (7) admet p racines simples voisines respectivement de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, et, par conséquent, que l'équation (3) admet p racines simples représentées par la même formule $y = (v_1 + y')x^{\frac{q}{p}}$, v_1 étant l'une quelconque des racines de l'équation binôme $v^p = \lambda$, et y' ayant une valeur infiniment petite. En remplaçant v par $v_1 + y'$, l'équation (7) devient

$$(8)\qquad \mathfrak{F}(x', v) = F^{(1)}(x', y') = 0.$$

A une valeur infiniment petite de x' correspond une seule valeur infiniment petite de y', qui est par conséquent une fonction holomorphe de x', et se développe en une série convergente

$$y' = ax' + bx'^2 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de x'. A cette valeur de y' correspond un système circulaire de p valeurs de y,

$$y = x^{\frac{q}{p}}\left(v_1 + ax^{\frac{1}{p}} + bx^{\frac{2}{p}} + \ldots\right).$$

Si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, et c'est le cas

que nous étudierons d'abord, la séparation des n valeurs infiniment petites de y est effectuée dès la première approximation. A chaque côté C_i de la ligne polygonale P correspondent $k_i p = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ valeurs de y du même degré, qui se répartissent en k_i systèmes circulaires d'un même nombre p de valeurs.

3. Nous représenterons le polynôme Q par

$$Q(x, y) = \Sigma B_{\gamma\delta}\, y^{\gamma-1} x^{\delta-1},$$

et nous dirons que le terme $B_{\gamma\delta}\, y^{\gamma-1} x^{\delta-1}$ correspond au point (γ, δ) du réseau des nombres entiers. Menons des droites $O'\alpha'$, $O'\beta'$ parallèles à $O\alpha$, $O\beta$, à une distance égale à l'unité (*fig.* 1). Les termes indépendants de x correspondent à des points situés sur $O'\alpha'$, les termes indépendants de y à des points situés sur $O'\beta'$. Nous allons démontrer que tous les termes du polynôme Q, qui correspondent aux points du réseau situés au-dessous de la ligne polygonale P, ou sur cette ligne, doivent avoir leurs coefficients nuls séparément.

Si l'on considère les valeurs de y relatives au côté C_i, on obtiendra les termes du moindre degré dans le polynôme Q en faisant mouvoir une droite parallèle à C_i, à partir de l'origine O, jusqu'à ce qu'elle rencontre un ou plusieurs points (γ, δ); soit Γ_i la position de cette parallèle et

$$B_{\gamma_i\delta_i}\, y^{\gamma_i-1} x^{\delta_i-1} + \Sigma B_{\gamma\delta}\, y^{\gamma-1} x^{\delta-1} + B_{\gamma'_i\delta'_i}\, y^{\gamma'_i-1} x^{\delta'_i-1}$$

le premier groupe ordonné suivant les puissances décroissantes de y; comme on a

$$\gamma_i \mu + \delta_i = \gamma\mu + \delta = \gamma'_i \mu + \delta'_i,$$

d'où

$$\frac{\delta'_i - \delta_i}{\gamma_i - \gamma'_i} = \frac{\delta - \delta_i}{\gamma_i - \gamma} = \mu = \frac{q}{p},$$

$$\gamma_i - \gamma'_i = t_i p, \quad \delta'_i - \delta_i = t_i q,$$

$$\gamma_i - \gamma = tp, \quad \delta - \delta_i = tq,$$

les nombres t et t_i étant entiers, si l'on pose

$$\varphi(v) = B_{\gamma_i\delta_i}\, v^{\gamma_i-1} + \Sigma B_{\gamma\delta}\, v^{\gamma-1} + B_{\gamma'_i\delta'_i}\, v^{\gamma'_i-1} = v^{\gamma'_i-1} \mathfrak{L}_i,$$

$$\mathfrak{L}_i = B_{\gamma_i\delta_i} \lambda^{t_i} + \Sigma B_{\gamma\delta} \lambda^{t_i-t} + B_{\gamma'_i\delta'_i},$$

il vient

$$(9)\quad Q(x,y)=x^{(\gamma_i-1)\mu+\delta_i-1}\left[\varphi(v)+x'\psi(x',v)\right]=x'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}\,Q^{(1)}(x',y'),$$

$\psi(x', v)$ étant un polynôme entier en x' et v.

D'après la formule (6), on a

$$(10)\qquad F(x,y)=x'^{\alpha_i q+\beta_i p}\,F^{(1)}(x',y'),$$

d'où

$$(11)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x'^{(\alpha_i-1)q+\beta_i p}\,\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y'},$$

et l'intégrale (2) devient

$$(12)\qquad V=p\int\frac{x'^{\gamma_i q+\delta_i p}\,Q^{(1)}(x',y')}{x'^{\alpha_i q+\beta_i p}\,\dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial y'}}\,\frac{dx'}{x'}=\int U\,\frac{dx'}{x'}.$$

Pour qu'elle conserve une valeur finie, il faut que la quantité U soit infiniment petite. Cette condition est remplie si la droite Γ_i est au-dessus de C_i; car on a, dans ce cas,

$$\gamma_i q+\delta_i p>\alpha_i q+\beta_i p;$$

d'ailleurs, la dérivée $\dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial y'}$, qui est égale à $\mathfrak{F}'_v$, et se réduit à $\Phi'(v)$ pour $x'=0$, n'est pas infiniment petite. Si elle n'était pas au-dessus, il faudrait que la quantité $Q^{(1)}(x',y')$ fût infiniment petite et, par conséquent, que l'on eût $\varphi(v)=0$ ou $\mathfrak{L}_i=0$; cela devant avoir lieu pour les k_i racines de l'équation $L_i=0$ supposées inégales, le polynôme $\mathfrak{L}_i$ serait d'un degré égal ou supérieur à L_i, et l'on aurait $t_i \geqq k_i$ ou $t_i p \geqq k_i p$, c'est-à-dire $\gamma_i-\gamma'_i \geqq \alpha_i-\alpha_{i+1}$; la longueur de la droite Γ_i, entre les deux points extrêmes situés sur cette droite, serait égale ou supérieure à celle du côté C_i.

Si la parallèle Γ_0 au premier côté C_0 n'était pas au-dessus de lui, cette parallèle ayant une longueur au moins égale à celle de C_0, et son premier point b_0 étant à gauche du point a_0 ou n, son dernier point b'_0

serait à gauche du sommet a_1. La parallèle Γ_1 à C_1 rencontrant Γ_0 en b'_0, ou en un point n'appartenant pas au réseau des nombres entiers, mais situé encore plus à gauche, son dernier point b'_1 serait à gauche du sommet a_2. En continuant de la sorte, on arriverait à une droite Γ_{h-1} parallèle au dernier côté C_{h-1}, et dont l'extrémité b'_{h-1} serait à gauche du point a_h ou l situé sur l'axe $O\beta$, ce qui est impossible.

Si plusieurs parallèles successives Γ_0, Γ_1, ..., Γ_{i-1}, à partir de la première, étaient au-dessus des côtés correspondants C_0, C_1, ..., C_{i-1}, la suivante Γ_i n'étant pas au-dessus de C_i, le premier point b_i de Γ_i étant encore dans ce cas à gauche du sommet a_i, son dernier point b'_i serait à gauche de a_{i+1}, et l'on continuerait, comme précédemment, pour arriver à la même impossibilité.

Ainsi, il est nécessaire que toutes les droites Γ_i soient au-dessus des côtés correspondants C_i et, par conséquent, que tous les termes qui correspondent aux points du réseau situés au-dessous de la ligne polygonale P, ou sur cette ligne, disparaissent du polynôme Q.

4. Il est facile de trouver les termes du moindre degré dans le polynôme Q. Le côté C_i, dont la projection sur $O\alpha$ contient $\alpha_i - \alpha_{i+1}$ ou $k_i p$ divisions, est divisé par les parallèles à $O\beta$ en $k_i p$ parties égales. Quand on parcourt ce côté à partir du sommet a_i, à chaque division parcourue on s'élève de $\frac{q}{p}$; après t divisions, on s'est élevé de $\frac{tq}{p}$; soit $tq = sp - r$, r étant un nombre entier positif et moindre que p; l'ordonnée de rang t, prolongée au-dessus de C_i, rencontre un point du réseau à la distance $\frac{r}{p}$; le nombre r prenant toutes les valeurs inférieures à p, quand t varie de 1 à $p-1$, la distance minimum est $\frac{1}{p}$; on a donc

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1, \quad Q(x, y) = x'^{(\alpha_i - 1)q + (\beta_i - 1)p + 1} Q^{(1)}(x', y'),$$

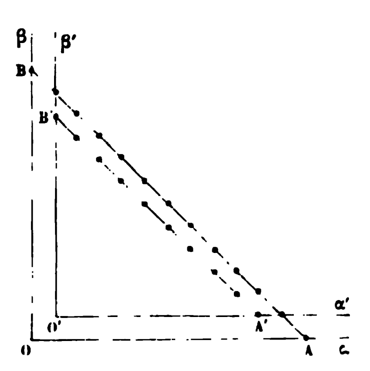
et l'intégrale (12) se réduit à

$$V = p \int \frac{Q^{(1)}(x', y')}{F'^{(1)}_{y'}} dx'. \tag{13}$$

Dans le cas que nous étudions, les conditions précédentes sont suffisantes, puisque la dérivée $F_{y^r}^{(1)}$ n'est pas infiniment petite.

Remarquons que tous les points du réseau qui sont situés au-dessous de la ligne brisée P, ou sur cette ligne, conviennent au polynôme Q, qui est du degré $m-3$. Sur les axes $O\alpha$, $O\beta$ (*fig.* 2) prenons,

Fig. 2.



en effet, des longueurs OA, OB égales à m; tous les termes du polynôme $F(x, y)$ se rapportent à des points situés dans le triangle isoscèle AOB ou sur ses côtés. Sur les droites $O'\alpha'$, $O'\beta'$ prenons de même des longueurs O'A', O'B' égales à $m-3$; tous les points du réseau situés dans le triangle isoscèle A'O'B' ou sur ses côtés conviennent au polynôme Q. La ligne brisée P étant située à l'intérieur du triangle AOB, excepté les deux points extrêmes qui peuvent coïncider avec A et B, tous les points du réseau situés au-dessous de cette ligne ou sur cette ligne, à l'exception des points placés sur OA et OB, sont situés à l'intérieur du triangle A'O'B' ou sur ses côtés.

5. Il faut maintenant compter le nombre de ces points. Les points du réseau se succédant de p en p divisions sur le côté C_i, ce côté en contient $k_i - 1$, outre ses deux extrémités. Considérons le trapèze formé par le côté C_i et les deux ordonnées $a_i d_i$, $a_{i+1} d_{i+1}$ menées par ses extrémités (*fig.* 3); prolongeons chacune de ces ordonnées d'une longueur égale à l'autre, de manière à former le rectangle $e_i d_i e_{i+1} d_{i+1}$; le nombre des points du réseau situés à l'intérieur de ce rectangle, abs-

traction faite de ceux qui sont placés sur la droite C_i, est

$$(\alpha_i - \alpha_{i+1} - 1)(\beta_i + \beta_{i+1} - 1) - (k_i - 1).$$

En divisant par 2, on a le nombre des points situés à l'intérieur du trapèze; à ce nombre nous ajouterons les β_i points placés sur l'or-

Fig. 3.

donnée de droite $a_i d_i$, à partir de $O'\alpha'$, l'ordonnée de gauche $a_{i+1} d_{i+1}$ étant regardée comme appartenant au trapèze suivant, et les $k_i - 1$ points placés sur C_i; nous obtiendrons pour le trapèze relatif au côté C_i un nombre de points marqué par

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[(\alpha_i - \alpha_{i+1} - 1)(\beta_i + \beta_{i+1} - 1) + (k_i - 1)] + \beta_i \\ &= \tfrac{1}{2}[(\alpha_i\beta_i - \alpha_{i+1}\beta_{i+1}) + (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1}) - (\alpha_i - \alpha_{i+1}) - (\beta_{i+1} - \beta_i) + k_i]. \end{aligned}$$

Cette formule convient au triangle relatif au premier côté C_0 (*fig.* 1) et au dernier trapèze dont l'ordonnée de gauche Ol ne doit pas être comptée; il suffit de faire, d'une part $\alpha_0 = n$, $\beta_0 = 0$, d'autre part $\alpha_h = 0$, $\beta_h = l$. Le nombre total des points cherchés est donc

$$(14) \qquad \mathcal{N} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=h-1} (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1} + k_i) - \frac{n+l}{2};$$

c'est le nombre des relations linéaires et homogènes auxquelles doivent satisfaire les coefficients du polynôme Q, pour que l'intégrale conserve une valeur finie dans le voisinage du point critique (a, b).

Seconde transformation.

6. Nous avons traité le cas où les équations $L = 0$, relatives aux différents côtés du polygone P, n'ont pas de racines multiples. Supposons maintenant que l'équation $L_i = 0$ ait une racine multiple λ d'ordre n'; l'équation $\Phi(v) = 0$ admettant n' racines égales à v_1, n' égales à v_2, ..., n' égales à v_p, l'équation (7) admet n' racines voisines de v_1, n' voisines de v_2, ..., n' voisines de v_p; l'équation (3) admet donc n' racines ayant la valeur approchée $v_1 x^{\frac{q}{p}}$, n' ayant la valeur approchée $v_2 x^{\frac{q}{p}}$, ..., n' ayant la valeur approchée $v_p x^{\frac{q}{p}}$; les valeurs approchées de ces pn' racines sont représentées par la même formule $v_1 x^{\frac{q}{p}}$, et les valeurs elles-mêmes par la formule $y = (v_1 + y')x^{\frac{q}{p}}$, y' étant une quantité infiniment petite. Dans l'équation (7), les termes indépendants de x' proviennent du développement de

$$\Phi(v_1 + y') = \Phi^{n'}(v_1)\frac{y'^{n'}}{1.2\ldots n'} + \Phi^{n'+1}(v_1)\frac{y'^{n'+1}}{1.2\ldots(n'+1)} + \cdots.$$

A une valeur infiniment petite de x' correspondent n' valeurs infiniment petites de y'. Pour répartir ces n' racines en groupes du même degré, puis en systèmes circulaires, on procédera comme précédemment. Soit

$$F^{(1)}(x', y') = \Sigma A'_{\alpha'\beta'} y'^{\alpha'} x'^{\beta'};$$

on formera la ligne brisée convexe P' allant du point n' situé sur l'axe $O\alpha$ au point l' situé sur $O\beta$, dont chaque côté passe par plusieurs points (α', β'), et qui laisse tous les autres au-dessus d'elle. Au côté C'_i correspond une manière de former le groupe des termes du moindre degré

$$A'_{\alpha'_i\beta'_i} y'^{\alpha'_i} x'^{\beta'_i} + \Sigma A'_{\alpha'\beta'} y'^{\alpha'} x'^{\beta'} + A'_{\alpha'_{i+1}\beta'_{i+1}} y'^{\alpha'_{i+1}} x'^{\beta'_{i+1}}.$$

En désignant par μ' le degré de y' par rapport à x', on a

$$\alpha'_i\mu' + \beta'_i = \alpha'\mu' + \beta' = \alpha'_{i+1}\mu' + \beta'_{i+1};$$

d'où

$$\mu' = \frac{\beta'_{i+1} - \beta'_i}{\alpha'_i - \alpha'_{i+1}} = \frac{\beta' - \beta'_i}{\alpha'_i - \alpha'} = \frac{q'}{p'},$$
$$\alpha'_i - \alpha'_{i+1} = k'_i p', \quad \beta'_{i+1} - \beta'_i = k'_i q',$$
$$\alpha'_i - \alpha' \ = k' p', \quad \beta' \ - \beta'_i = k' q'.$$

Si l'on pose

$$x' = x''^{p'}, \quad y' = v' x'^{\mu'} = v' x''^{q'}, \quad v'^{p'} = \lambda',$$

et

$$\Phi^{(1)}(v') = A'_{\alpha'_i \beta'_i} v'^{\alpha'_i} + \Sigma A'_{\alpha' \beta'} v'^{\alpha'} + A'_{\alpha'_{i+1} \beta'_{i+1}} v'^{\alpha'+1} = v'^{\alpha'+1} L_i^{(1)},$$
$$L_i^{(1)} = A'_{\alpha'_i \beta'_i} \lambda'^{k'_i} + \Sigma A'_{\alpha' \beta'} \lambda'^{k'_i - k'} + A'_{\alpha'_{i+1} \beta'_{i+1}},$$

on a

$$F^{(1)}(x', y') = x'^{\alpha'_i \mu' + \beta'} [\Phi^{(1)}(v') + x'' \Psi^{(1)}(x'', v')] = x'^{\alpha'_i \mu' + \beta'} \mathfrak{F}^{(1)}(x'', v'),$$

$\Psi^{(1)}(x'', v')$ étant un polynôme entier en x'' et v', et l'équation (8) devient

$$(15) \qquad \mathfrak{F}^{(1)}(x'', v') = \Phi^{(1)}(v') + x'' \Psi^{(1)}(x'', v') = 0.$$

A une racine simple λ' de l'équation $L_i^{(1)} = 0$ correspondent p' valeurs de y' que l'on peut représenter par la formule $y' = (v'_1 + y'') x'^{\frac{q'}{p'}}$, v'_1 étant l'une quelconque des racines de l'équation binôme $v'^{p'} = \lambda'$, et y'' ayant une valeur infiniment petite. En remplaçant v' par $v'_1 + y''$, l'équation (15) devient

$$(16) \qquad \mathfrak{F}^{(1)}(x'', v') = F^{(2)}(x'', y'') = 0.$$

A une valeur infiniment petite de x'' correspond une seule valeur infiniment petite de y'', qui est par conséquent fonction holomorphe de x'' et se développe en une série convergente

$$y'' = a x'' + b x''^2 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de x''. A cette valeur de y'' correspond un système circulaire de p' valeurs de y' par

rapport à la variable x',

$$y' = x'^{\frac{q'}{p'}}\left(v'_1 + a x'^{\frac{1}{p'}} + b x'^{\frac{2}{p'}} + \ldots\right),$$

et un système circulaire de pp' valeurs de y par rapport à la variable x,

$$y = x^{\frac{q}{p}}\left[v_1 + x^{\frac{q'}{pp'}}\left(v'_1 + a x^{\frac{1}{pp'}} + b x^{\frac{2}{pp'}} + \ldots\right)\right].$$

On procédera de la même manière pour chacune des racines multiples des équations $L = 0$. Si les équations $L^{(1)} = 0$, relatives aux côtés des différents polygones P′ que l'on a à former ainsi, n'ont pas de racines multiples, les n valeurs infiniment petites seront séparées dès la seconde approximation.

7. Nous avons vu (n° 3) que, lorsque les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, il est nécessaire que tous les termes du polynôme $Q(x, y)$ qui se rapportent aux points du réseau situés au-dessous de la ligne brisée P, ou sur cette ligne, aient leurs coefficients nuls. La même propriété existe lorsque ces équations ont des racines multiples, par exemple lorsque l'équation $L_i = 0$ a une racine multiple λ d'ordre n'. Il suffit, pour cela, de démontrer que, si la droite Γ_i n'était pas au-dessus du côté C_i, elle aurait toujours une longueur égale ou supérieure à celle de ce côté. Supposons que l'on ait

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p - s,$$

le nombre entier s étant égal ou supérieur à zéro. Si l'intégrale (12), qui devient

$$V = p\int \frac{Q^{(1)}(x', y')}{\frac{\partial[x' F^{(1)}]}{\partial y'}} \frac{dx'}{x'^s}, \tag{17}$$

restait finie, à plus forte raison l'intégrale

$$\int \frac{Q^{(1)}(x', y')}{\frac{\partial[x' F^{(1)}]}{\partial y'}} dx' \tag{18}$$

conserverait une valeur finie.

Nous poserons

$$Q^{(1)}(x', y') = \Sigma B'_{\gamma'\delta'} y'^{\gamma'-1} x'^{\delta'-1},$$

et nous dirons que le terme $B'_{\gamma'\delta'} y'^{\gamma'-1} x'^{\delta'-1}$ correspond au point (γ', δ') du réseau. Concevons que l'on remplace le polynôme $F^{(1)}(x', y')$ par $x' F^{(1)}(x', y')$, ce qui revient à soulever d'une unité la ligne brisée P'. Cette ligne commençait au point n' sur $O\alpha$; après le soulèvement, elle commence au point $(n', 1)$ sur $O'\alpha'$. Si les équations $L^{(1)} = 0$, relatives aux côtés du polygone P', n'ont pas de racines multiples, il est nécessaire, d'après le raisonnement du n° 3, que tous les termes du polynôme $Q^{(1)}(x', y')$ qui se rapportent aux points du réseau situés au-dessous de la ligne brisée P' ou sur cette ligne, soulevée comme nous l'avons dit, aient des coefficients nuls. Aux n' points situés sur $O'\alpha'$ correspondent les termes de $Q^{(1)}(x', y')$ indépendants de x'; d'après la formule (9), ces termes proviennent du développement de

$$\varphi(v_1 + y') = \varphi(v_1) + \varphi'(v_1)\frac{y'}{1} + \varphi''(v_1)\frac{y'^2}{1.2} + \cdots;$$

on aurait donc

$$\varphi(v_1) = 0, \quad \varphi'(v_1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{n'-1}(v_1) = 0,$$

et λ serait aussi racine d'ordre n' de l'équation $\mathfrak{L}_i = 0$ et, par suite, on aurait encore $t_i \overset{=}{>} k_i$.

Ainsi les conditions trouvées précédemment sont toujours nécessaires, et, quand elles sont remplies, l'intégrale se ramène à la forme

$$\text{(13)} \qquad V = p\int \frac{Q^{(1)}(x', y')}{F^{(1)\prime}_{y'}}\, dx'.$$

Mais la racine multiple λ exige des conditions nouvelles que l'on obtiendra par le même procédé. Si les équations $L^{(1)} = 0$ n'ont pas de racines multiples, pour que l'intégrale (13) conserve une valeur finie, il est nécessaire et il suffit que tous les termes du polynôme $Q^{(1)}(x', y')$, qui correspondent à des points du réseau situés au-dessous de la ligne

brisée P', ou sur cette ligne, aient leurs coefficients nuls; le nombre des conditions nouvelles sera exprimé par la formule

$$(19) \qquad \mathcal{N}' = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h'-1}(\alpha'_i\beta'_{i+1} - \beta'_i\alpha'_{i+1} + k'_i) - \frac{n'+l'}{2},$$

pareille à la formule (14). Chacune des racines multiples des équations $L = 0$ exigera un nombre analogue de conditions nouvelles.

8. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les équations $L^{(1)} = 0$ n'ont pas de racines multiples. Lorsque l'équation $L_i^{(1)} = 0$ a une racine multiple λ' d'ordre n'', l'équation (16) admet n'' racines infiniment petites; pour les séparer, on formera un polynôme P'' dont chaque côté donnera un groupe de racines du même degré à l'aide d'une équation $L^{(2)} = 0$. Si les équations $L^{(2)} = 0$ n'ont pas de racines multiples, le partage des racines en systèmes circulaires sera effectué à cette troisième approximation. Il faut nous assurer que toutes les conditions trouvées précédemment sont encore nécessaires. Nous avons vu (n° 7) que, si la parallèle Γ_i au côté C_i du polygone P n'était pas au-dessus de ce côté, l'intégrale (18) devrait rester finie. Nous avons démontré aussi, dans ce même numéro, que, si les équations $L^{(1)} = 0$, qui sont celles de la seconde approximation pour l'équation $F(x, y) = 0$, n'ont pas de racines multiples, pour que l'intégrale proposée (2) reste finie, il est nécessaire que tous les termes du numérateur $Q(x, y)$, qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne polygonale P, ou sur cette ligne, aient des coefficients nuls. En appliquant cette propriété à l'intégrale (18) et remarquant que les équations $L^{(2)} = 0$ sont précisément celles de la seconde approximation pour l'équation $F^{(1)}(x', y')$, on en conclura que tous les termes du numérateur $Q^{(1)}(x', y')$; qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne brisée P' ou sur cette ligne, soulevée d'une unité, ont leurs coefficients nuls et, par conséquent, que λ serait encore racine d'ordre n' de l'équation $\mathcal{L}_i = 0$. Il en résulte que tous les termes du polynôme $Q(x, y)$, qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne brisée P, ou sur cette ligne, ont leurs coefficients nuls. L'intégrale proposée se réduit alors à la forme (13) et, d'après le même principe, tous les

termes du polynôme $Q^{(1)}(x', y')$, qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne brisée P', ou sur cette ligne, ont leurs coefficients nuls. Ainsi, toutes les conditions trouvées précédemment, et dont le nombre est $\mathcal{A} + \Sigma \mathcal{A}'$, sont encore nécessaires.

La seconde transformation ramène l'intégrale (13) à la forme

$$(20) \qquad V = pp' \int \frac{Q^{(2)}(x'', y'')}{F^{(2)\prime}_{y''}} dx''.$$

Pour que cette intégrale reste finie, il est nécessaire et il suffit que tous les termes du polynôme $Q^{(2)}(x'', y'')$ qui se rapportent à des points situés au-dessous de la ligne brisée P'', ou sur cette ligne, aient leurs coefficients nuls. Le nombre des conditions nouvelles exigées par la racine multiple λ' est

$$(21) \qquad \mathcal{A}'' = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=h''-1} (\alpha''_i \beta''_{i+1} - \beta''_i \alpha''_{i+1} + k''_i) - \frac{n'' + l''}{2}.$$

On continuera de cette manière jusqu'à ce que les racines soient séparées, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on arrive à des équations $L^{(s)} = 0$ n'ayant plus de racines multiples (¹). Si $s+1$ est le plus grand nombre des opérations successives nécessaires pour effectuer cette séparation, le nombre des relations linéaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients du polynôme Q, pour que l'intégrale proposée conserve une valeur finie dans le voisinage du point critique (a, b), est

$$(22) \qquad A_{(a,b)} = \mathcal{A} + \Sigma \mathcal{A}' + \Sigma \mathcal{A}'' + \ldots + \Sigma \mathcal{A}^{(s)}.$$

Degrés des points critiques.

9. Les points critiques sont déterminés par les deux équations simultanées $F(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$. Si l'on désigne par $y_1, y_2, \ldots, y_m$

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 48.

les m racines de la première équation, l'équation

$$(23) \qquad R(x) = F'_y(x, y_1)\, F'_y(x, y_2) \ldots F'_y(x, y_m),$$

résultant de l'élimination de y entre ces deux équations, donnera les valeurs de x pour lesquelles l'équation proposée admet des racines égales. Soit a une racine de l'équation résultante; si, pour $x = a$, l'équation $F(x, y) = 0$ admet n racines égales à b, nous dirons que le point (a, b) est un point critique de l'*ordre n*. A une valeur de x voisine de a correspondent n valeurs de y voisines de b; le produit des n valeurs correspondantes de la fonction $F'_y(x, y)$ est divisible par une certaine puissance de $x - a$, dont l'exposant sera appelé le *degré* du point critique et sera désigné par $D_{(a,b)}$.

Nous supposerons, comme précédemment, que l'origine a été transformée au point critique. La première substitution (n° 3) nous a donné

$$(11) \qquad F'_y(x, y) = x^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i}\, F^{(1)\prime}_{y'}(x', y').$$

Bornons-nous, pour le moment, au premier facteur $x^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i}$. Les $k_i p$ valeurs de y, qui se rapportent à un même côté C_i du polygone P et qui sont du même degré μ, fournissent une puissance de x dont l'exposant est

$$\begin{aligned}(\alpha_i - 1) k_i q + \beta_i k_i p &= (\alpha_i - 1)(\beta_{i+1} - \beta_i) + \beta_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\ &= (\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1}) - (\beta_{i+1} - \beta_i).\end{aligned}$$

Pour les n valeurs de y, on a l'exposant

$$(24) \qquad \mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{i=h-1} (\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1}) - l.$$

La comparaison des formules (14) et (24) conduit à la relation

$$(25) \qquad \mathfrak{D} - 2\mathfrak{A} = n - \sum_{i=0}^{i=h-1} k_i.$$

Si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, le second fac-

teur $F_{y'}^{(1)'}(x', y')$ n'étant pas infiniment petit, on a ainsi le degré du point critique.

10. Lorsque l'équation $L_i = 0$ admet une racine multiple λ d'ordre n', la fonction $F_{y'}^{(1)'}(x', y')$ étant infiniment petite pour les pn' valeurs correspondantes de y, il en résulte une augmentation du degré du point critique. On a posé $y = (v_1 + y')x'^q$; à chaque valeur de y' correspond une valeur de y considéré comme fonction de x' et, par conséquent, p valeurs de y considéré comme fonction de x; pour ces p valeurs de y, la valeur de la fonction $F_{y'}^{(1)'}(x', y')$ étant la même, chacune des valeurs de cette fonction entrera p fois comme facteur, c'est-à-dire sera élevée à la puissance p dans le produit $R(x)$. A une valeur infiniment petite de x' correspondent n' valeurs infiniment petites de y', et la seconde substitution donne

$$(26) \qquad F_{y'}^{(1)'}(x', y') = x'^{(\alpha'_i - 1)\mu' + \beta'} F_{y''}^{(2)'}(x'', y'').$$

Pour ces n' valeurs de y', le premier facteur fournit une puissance de x' ayant pour exposant

$$(27) \qquad \mathcal{W}' = \sum_{i=0}^{i=h'-1} (\alpha'_i \beta'_{i+1} - \beta'_i \alpha'_{i+1}) - l';$$

c'est aussi l'exposant de la puissance de x, puisque chacune des n' fonctions $F_{y'}^{(1)'}(x', y')$ doit être élevée à la puissance p. La comparaison des formules (19) et (27) conduit à la relation

$$(28) \qquad \mathcal{W}' - 2\mathcal{N}' = n' - \sum_{i=0}^{i=h'-1} k'_i,$$

pareille à la relation (25). Si les équations $L^{(1)} = 0$ n'ont pas de racines multiples, le second facteur $F_{y''}^{(2)'}(x'', y'')$ n'étant pas infiniment petit, on a ainsi l'augmentation du degré du point critique due à la racine multiple λ. Chaque racine multiple des équations $L = 0$ produira une augmentation analogue du degré.

11. Lorsque l'équation $L_i^{(1)} = 0$ admet une racine multiple λ' d'ordre n'', la fonction $F^{(2)}_{y''}(x'', y'')$ étant infiniment petite pour les $p'n''$ valeurs correspondantes de y', il en résulte une nouvelle augmentation du degré. La troisième substitution donne

$$(29) \qquad F^{(2)}_{y''}(x'', y'') = x'''^{(\alpha''_i - 1)\mu'' + \beta''} F^{(3)}_{y'''}(x''', y''').$$

Pour les n'' valeurs de y'', le premier facteur fournit une puissance de x'' ayant pour exposant

$$(30) \qquad \mathfrak{D}'' = \sum_{i=0}^{i=k''-1} (\alpha''_i \beta''_{i+1} - \beta''_i \alpha''_{i+1}) - l''.$$

C'est aussi l'exposant de la puissance de x' et de celle de x, puisqu'il faut élever chacune des fonctions (29), d'abord à la puissance p', puis à la puissance p. La comparaison des formules (21) et (30) montre que ce nombre satisfait à la relation

$$(31) \qquad \mathfrak{D}'' - 2\mathfrak{A}'' = n'' - \sum_{i=0}^{i=k''-1} k''_i,$$

pareille aux relations (25) et (28).

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à des équations $L^{(s)} = 0$ n'ayant plus de racines multiples. Le degré du point critique (a, b) sera

$$(32) \qquad D_{(a,b)} = \mathfrak{D} + \Sigma\mathfrak{D}' + \Sigma\mathfrak{D}'' + \ldots + \Sigma\mathfrak{D}^{(s)}.$$

De la combinaison des relations précédentes on déduit la relation générale

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_{(a,b)} - 2A_{(a,b)} = {} & n + \Sigma n' + \Sigma n'' + \ldots + \Sigma n^{(s)} \\ & - \Sigma k - \Sigma k' - \Sigma k'' - \ldots - \Sigma k^{(s)}, \end{aligned} \right.$$

les nombres k se rapportant aux côtés du polygone P, les nombres k' aux côtés des polygones P', etc.

12. La considération du nombre des lacets donne à cette équation une signification très-simple. On sait que les lacets binaires relatifs aux p racines d'un système circulaire se réduisent à $p-1$ d'entre eux ([1]); d'après cela, le nombre $N_{(a,b)}$ des lacets distincts relatifs au point critique (a, b) est égal au nombre n des racines qui deviennent égales en ce point, diminué du nombre des systèmes circulaires suivant lesquels elles se distribuent. Considérons les équations $L^{(r)} = 0$ relatives aux polygones $P^{(r)}$ du même ordre dans la série des opérations; chaque racine simple $\lambda^{(r)}$ de l'une de ces équations donne un système circulaire de $pp'p''\ldots p^{(r)}$ valeurs de y; le degré de l'équation étant $k^{(r)}$, et $n^{(r+1)}$ désignant l'ordre ou le degré d'une des racines multiples, le nombre des racines simples de ces équations est $\Sigma k^{(r)} - \Sigma n^{(r+1)}$. Le nombre des systèmes circulaires est donc

$$(\Sigma k - \Sigma n') + (\Sigma k' - \Sigma n'') + \ldots + [\Sigma k^{(s-1)} - \Sigma n^{(s)}] + \Sigma k^{(s)};$$

on en déduit le nombre des lacets

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_{(a,b)} = {} & n + \Sigma n' + \Sigma n'' + \ldots + \Sigma n^{(s)} \\ & - \Sigma k - \Sigma k' - \Sigma k'' - \ldots - \Sigma k^{(s)}, \end{aligned} \right.$$

et l'équation (33) devient

$$(35) \qquad D_{(a,b)} - 2A_{(a,b)} = N_{(a,b)}.$$

Nombre des intégrales abéliennes de première espèce.

13. Concevons que l'on applique cette relation à tous les points critiques et que l'on ajoute membre à membre les équations ainsi obtenues; si l'on désigne par A le nombre total des conditions auxquelles doit être assujetti le polynôme $Q(x, y)$ pour que l'intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, par N le nombre des lacets se rapportant aux différents points critiques, et par D la somme

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 55 et 174.

des degrés de tous ces points, on a

$$D - 2A = N. \tag{36}$$

Mais la somme D des degrés de tous les points critiques est égale au degré $m(m-1)$ de l'équation résultante $R(x) = 0$; on en déduit

$$A = \frac{m(m-1)}{2} - \frac{N}{2}, \tag{37}$$

et l'on remarque que le nombre N des lacets est pair.

Le polynôme $Q(x, y)$, du degré $m-3$, contient $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ coefficients; ces coefficients sont assujettis à vérifier A équations linéaires et homogènes; nous supposerons ces relations distinctes; si l'on appelle p la différence

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - A = \frac{N}{2} - (m-1), \tag{38}$$

tous les coefficients pourront s'exprimer par des fonctions linéaires et homogènes de p quantités arbitraires $M_1, M_2, \ldots, M_p$.

Tout polynôme Q satisfaisant aux conditions précédentes sera de la forme

$$Q = M_1 Q_1 + M_2 Q_2 + \ldots + M_p Q_p, \tag{39}$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ étant p polynômes particuliers du même degré et satisfaisant aux mêmes conditions. Il en résulte que toutes les intégrales abéliennes de première espèce se ramènent à p d'entre elles. Si l'on représente par $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)}$ celles qui se rapportent aux polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, c'est-à-dire si l'on pose

$$v^{(i)} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i}{F'_y} dx, \tag{40}$$

l'indice i variant de 1 à p, une intégrale quelconque de première espèce sera

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q}{F'_y} dx = M_1 v^{(1)} + M_2 v^{(2)} + \ldots + M_p v^{(p)}. \tag{41}$$

Remarques sur les points multiples.

14. Les points critiques de la fonction y de x définie par l'équation $F(x, y) = 0$ sont les *points multiples* de la courbe analytique $F(x, y) = 0$, excepté les points critiques où $l = 1$. Pour ceux-ci, la ligne P se réduisant à une droite allant du point n sur l'axe $O\alpha$ au point 1 sur $O\beta$, et le point O' étant situé au-dessus de cette droite, le polynôme Q n'est assujetti à aucune condition; mais pour tous les autres le polynôme Q est assujetti à un certain nombre de conditions, ce qui signifie que la courbe $Q = 0$ passe par les points multiples de la courbe $F = 0$ et a avec elle, en chacun de ces points, un certain nombre de points communs. On obtient les points communs aux deux courbes en éliminant y entre les deux équations $F = 0$, $Q = 0$; si l'on désigne, comme au n° 9, par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les m racines de l'équation $F = 0$, l'équation résultante sera

$$\mathfrak{R}(x) = Q(x, y_1)\,Q(x, y_2)\ldots Q(x, y_m) = 0. \tag{42}$$

Le produit des n valeurs de la fonction $Q(x, y)$ relatives aux n valeurs de y voisines de b sera divisible par une certaine puissance de $x - a$, dont l'exposant sera le *degré* du point (a, b) considéré comme point commun aux deux courbes $F = 0$, $Q = 0$.

Supposons, comme précédemment, l'origine transportée au point critique. La première substitution nous a donné (n° 4)

$$Q(x, y) = x^{(\alpha_1 - 1)\mu + \beta_1 - 1 + \frac{1}{p}}\,Q^{(1)}(x', y').$$

Si l'on se borne au premier facteur, les $k_i p$ valeurs de y, qui se rapportent à un même côté C_i du polygone P, fournissent une puissance de x dont l'exposant est entier et égal à

$$\begin{aligned}
&(\alpha_i - 1)k_i q + (\beta_i - 1)k_i p + k_i \\
&\quad = (\alpha_i - 1)(\beta_{i+1} - \beta_i) + (\beta_i - 1)(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + k_i \\
&\quad = (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1}) - (\alpha_i - \alpha_{i+1}) - (\beta_{i+1} - \beta_i) + k_i.
\end{aligned}$$

Pour les n valeurs infiniment petites de y, on a l'exposant

$$\sum_{i=0}^{i=h-1} (\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} + k_i) - (n + l),$$

lequel, en vertu de la formule (14) du n° 5, est égal à $2\mathcal{A}$.

Si les équations $L = 0$ avaient des racines multiples, on trouverait de même, d'après le raisonnement du n° 10, que le second facteur donnerait pour chacune d'elles une nouvelle puissance de x ayant pour exposant $2\mathcal{A}'$, et ainsi de suite. Il en résulte que le point multiple (a, b) est un point commun du degré $2A_{(a,b)}$ aux deux courbes $F = 0$, $Q = 0$. La somme des degrés pour tous les points multiples est égale à $2A$.

L'équation résultante (42) est du degré $m(m-3)$. Outre les points précédents, les deux courbes ont $m(m-3) - 2A$, c'est-à-dire $2(p-1)$ autres points communs. La courbe $Q = 0$, qui satisfait aux A conditions relatives aux points critiques, est définie par $\frac{m(m-3)}{2} - A$, c'est-à-dire par $p - 1$ points pris à volonté sur la courbe $F = 0$; étant ainsi déterminée, elle coupe la courbe $F = 0$ en $p - 1$ autres points dépendant des premiers.

CHAPITRE II.

DES DEUX ESPÈCES DE LACETS.

Lacets de première espèce.

15. Dans l'étude de la fonction algébrique définie par l'équation irréductible $F(x, y) = 0$, du degré m, nous prendrons pour origine des lacets de première espèce un point x_0 pour lequel l'équation a m racines simples $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, et nous supposerons que l'origine O des coordonnées a été transportée en ce point. Lorsque les racines qui deviennent égales en un point critique se partagent en plusieurs systèmes circulaires, nous regarderons ce point critique comme la superposition de plusieurs points critiques distincts, à chacun desquels sera affecté un système circulaire de racines. Sur un lacet (a), décrit dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel que l'on ait à sa gauche l'aire du cercle a, se permutent p racines $y_{g_1}, y_{g_2}, \ldots, y_{g_p}$, et nous regarderons ce lacet comme la réunion des p lacets *binaires* (¹)

$$(a)_{g_1}^{g_2}, \quad (a)_{g_2}^{g_3}, \quad \ldots, \quad (a)_{g_{p-1}}^{g_p}, \quad (a)_{g_p}^{g_1}.$$

La suite de ces p lacets binaires, reproduisant la racine initiale et donnant une intégrale nulle, constitue une ligne neutre que l'on peut ajouter à un contour quelconque, sans changer la permutation des racines sur ce contour, ni la valeur de l'intégrale définie.

On peut former un système de lacets *fondamentaux* (²), c'est-à-dire un système de $m - 1$ lacets unissant les m racines, de plusieurs manières. Nous adopterons le mode suivant : nous prendrons d'abord

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 51.
(²) *Ibid.*, p. 53.

les $p-1$ lacets binaires

$$(a)_{g_1}^{g_2},\quad (a)_{g_2}^{g_3},\quad \dots,\quad (a)_{g_{p-1}}^{g_p}$$

d'un premier système circulaire (a), qui unissent les p racines y_{g_1}, y_{g_2}, $\dots$, y_{g_p}. Un second système circulaire (b) a des racines communes avec le premier et d'autres différentes; nous désignerons par y_{h_1} l'une quelconque des racines communes. Le système circulaire (b) est formé d'un premier groupe de racines y_{h_1}, y_{h_2}, $\dots$, y_{h_i} appartenant au système (a), d'un deuxième groupe $y_{h_{i+1}}$, $y_{h_{i+2}}$, $\dots$, $y_{h_{i'}}$ n'appartenant pas à ce système, d'un troisième groupe $y_{h_{i'+1}}$, $y_{h_{i'+2}}$, $\dots$, $y_{h_{i''}}$ appartenant au système (a), d'un quatrième groupe $y_{h_{i''+1}}$, $y_{h_{i''+2}}$, $\dots$, $y_{h_{i'''}}$ n'appartenant pas à ce système, et ainsi de suite. On prendra pour lacets fondamentaux les lacets binaires

$$(b)_{h_i}^{h_{i+1}},\quad (b)_{h_{i+1}}^{h_{i+2}},\quad \dots,\quad (b)_{h_{i'-1}}^{h_{i'}},$$

qui conduisent de la racine y_{h_i}, qui est l'une de celles du système (a), aux racines nouvelles $y_{h_{i+1}}$, $y_{h_{i+2}}$, $\dots$, $y_{h_{i'}}$; puis les lacets binaires

$$(b)_{h_{i''}}^{h_{i''+1}},\quad (b)_{h_{i''+1}}^{h_{i''+2}},\quad \dots,\quad (b)_{h_{i'''-1}}^{h_{i'''}},$$

qui conduisent de la racine $y_{h_{i''}}$, qui est aussi l'une de celles du système (a), aux racines nouvelles $y_{h_{i''+1}}$, $y_{h_{i''+2}}$, $\dots$, $y_{h_{i'''}}$, et ainsi de suite. De cette manière, tous les lacets binaires du système (b) qui conduisent à une racine nouvelle sont des lacets fondamentaux, tous ceux qui conduisent à une racine du système (a) sont des lacets non fondamentaux; le lacet désigné par $(b)_{h_0}^{h_1}$ est l'un quelconque des non fondamentaux.

Un troisième système circulaire (c) a des racines communes avec l'un ou l'autre des deux précédents et des racines différentes. Nous désignerons par y_{k_1} l'une quelconque des racines communes. Le système circulaire (c) est formé d'un premier groupe de racines communes y_{k_1}, y_{k_2}, $\dots$, y_{k_i}, d'un second groupe de racines différentes

$y_{k_{i+1}}, y_{k_{i+2}}, \ldots, y_{k_{i'}}$, et ainsi de suite. On prendra pour lacets fondamentaux les lacets binaires

$$(c)_{k_i}^{k_{i+1}}, \quad (c)_{k_{i+1}}^{k_{i+2}}, \quad \ldots, \quad (c)_{k_{i'-1}}^{k_{i'}},$$

qui conduisent de l'une des racines précédentes y_{k_i} aux racines nouvelles $y_{k_{i+1}}, y_{k_{i+2}}, \ldots, y_{k_{i'}}$; puis les lacets binaires

$$(c)_{k_{i''}}^{k_{i''+1}}, \quad (c)_{k_{i''+1}}^{k_{i''+2}}, \quad \ldots, \quad (c)_{k_{i'''-1}}^{k_{i'''}},$$

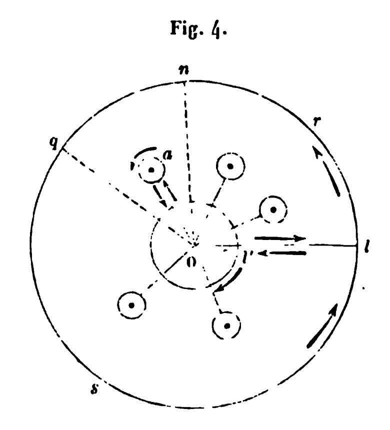
qui conduisent de l'une des racines précédentes $y_{k_{i''}}$ aux racines nouvelles $y_{k_{i''+1}}, y_{k_{i''+2}}, \ldots, y_{k_{i'''}}$, et ainsi de suite. De cette manière, tous les lacets binaires du système (c) qui conduisent à une racine nouvelle sont des lacets fondamentaux; les autres sont des lacets non fondamentaux; le lacet désigné par $(c)_{k_0}^{k_1}$ est l'un quelconque des non fondamentaux. Supposons, pour fixer les idées, qu'à l'aide des trois systèmes circulaires (a), (b), (c) on ait obtenu de la sorte $m-1$ lacets unissant les m racines de l'équation; le système des lacets fondamentaux sera formé; tous les lacets relatifs aux autres systèmes circulaires (d), (e), ... seront des lacets non fondamentaux.

Circuits de première espèce.

16. Nous appelons *circuit* la ligne fermée composée d'une droite très-grande Ol et d'une circonférence ayant son centre en O et enveloppant tous les points critiques (*fig.* 4). Comme on peut la parcourir successivement avec chacune des m racines $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, on aura ainsi les m circuits de première espèce. Chacun de ces circuits, décrits dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel que l'on ait à sa gauche l'aire enveloppée par le circuit, se ramène à une suite de lacets binaires de première espèce décrits dans le sens positif. Un lacet binaire entre d'une manière effective dans un circuit et dans un seul; car, si l'on remonte la suite des lacets géométriques de première espèce, à partir de l'entrée du lacet (a), avec la racine y_{g_r}, on arrive à

l'origine du circuit avec une racine déterminée que nous désignerons

Fig. 4.



par y_{α_r}; il en résulte que les p lacets binaires

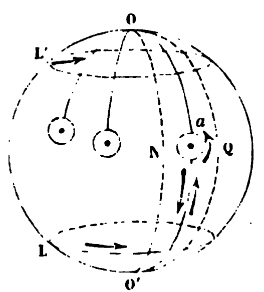
$$(a)_{g_1}^{g_2},\quad (a)_{g_2}^{g_3},\quad \ldots,\quad (a)_{g_{p-1}}^{g_p},\quad (a)_{g_p}^{g_1}$$

entrent respectivement dans les p circuits

$$(C)_{\alpha_1}^{\alpha_2},\quad (C)_{\alpha_2}^{\alpha_3},\quad \ldots,\quad (C)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p},\quad (C)_{\alpha_p}^{\alpha_1}.$$

Imaginons que la figure soit rapportée sur la sphère tangente au

Fig. 5.



point O (*fig.* 5) [1]. Au point diamétralement opposé O', les *m* racines

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 15.

deviennent infinies; mais, comme elles restent monotropes dans le voisinage, on peut les regarder comme distinctes; d'ailleurs, l'intégrale reste finie et conserve la même valeur, quand la ligne d'intégration, qui va d'un point à un autre, traverse le point O′, en se déformant d'une manière continue sur la sphère; le point O′ se comporte donc comme un point ordinaire. Nous le supposerons joint au point O par le demi-méridien OLO′ qui se projette sur la droite infinie Ol. Au circuit tracé dans le plan correspond sur la sphère un lacet formé de l'arc de méridien OL et d'un petit cercle enveloppant le point O′ et partageant la sphère en deux zones, dont la supérieure contient tous les points critiques. Ce lacet (O′), pouvant se réduire à un simple point, ramène évidemment la racine initiale et donne une intégrale nulle. Le circuit dans le plan jouit de la même propriété.

Lacets de seconde espèce.

17. Nous les formerons sur la sphère à l'aide d'arcs de grand cercle allant du point O′ aux points critiques et de petits cercles décrits autour de ces points, et nous nous représenterons ces lacets comme partant aussi du point O, en les faisant précéder et suivre du demi-méridien OLO′. Soient ONO′ et OQO′ deux demi-méridiens comprenant le point critique a et n'en comprenant aucun autre. Le lacet de seconde espèce (a'), partant du point O′ et décrit dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel que l'on ait à sa gauche l'aire du cercle a, se ramène au demi-méridien O′QO suivi du demi-méridien ONO′; en le faisant partir du point O, on a les chemins

$$(\mathrm{OLO}' + \mathrm{O}'\mathrm{QO}) + (\mathrm{ONO}' + \mathrm{O}'\mathrm{LO}),$$

qui se ramènent dans le plan aux deux chemins OlsqO et OnrlO (*fig.* 4). Il suffit, pour cela, de considérer le chemin OLO′+ O′QO comme enveloppant la partie postérieure de la sphère, et le chemin ONO′+ O′LO comme enveloppant la partie antérieure. L'un est la partie du circuit qui suit le lacet de première espèce (a), l'autre celle qui précède ce même lacet. Si l'on part avec la racine y_{a_r}, on remonte

la seconde partie du circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$ jusqu'à la fin du lacet $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, où l'on arrive avec la racine $y_{g_{r+1}}$; laissant de côté ce lacet, on remonte ensuite la première partie du circuit $(C)_{\alpha_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}$, ce qui conduit à la racine $y_{\alpha_{r+1}}$. On obtient ainsi le lacet binaire de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$, que l'on fait correspondre au lacet binaire de première espèce $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$. De cette manière, aux p lacets binaires de première espèce

$$(a)_{g_1}^{g_2}, \quad (a)_{g_2}^{g_3}, \quad \ldots, \quad (a)_{g_{p-1}}^{g_p}, \quad (a)_{g_p}^{g_1}$$

correspondent les p lacets binaires de seconde espèce

$$(a')_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \quad (a')_{\alpha_2}^{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad (a')_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p}, \quad (a')_{\alpha_p}^{\alpha_1},$$

qui permutent circulairement les p racines $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_p}$.

Remarquons que les lacets binaires de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$, qui, décrits dans le sens positif, conduisent d'une racine déterminée y_{α_r} à une autre, correspondent aux lacets binaires de première espèce $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$ qui entrent dans le circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$.

Il est clair que l'on peut effectuer la permutation des m racines de l'équation à l'aide des lacets de seconde espèce comme avec ceux de première espèce.

Circuits de seconde espèce.

18. Le circuit de seconde espèce, partant du point O′, se compose d'un arc de grand cercle O′L′ (*fig.* 5), situé dans le même plan méridien que OL, et d'un petit cercle enveloppant le point O, et partageant la sphère en deux zones, dont l'inférieure contient tous les points critiques; il se ramène sur la sphère à une suite de lacets de seconde espèce. On imaginera qu'il part aussi du point O, en le faisant précéder et suivre du demi-méridien OLO′. Sur le plan tangent en O (*fig.* 4), il se projette suivant un petit cercle relié au point O par le rayon Ol' et à l'extérieur duquel sont placés tous les points critiques.

Il est aisé de voir que le circuit de seconde espèce $(C')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$ contient le lacet $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$; car la première partie de ce circuit, partant du point O′,

jusqu'à l'entrée du lacet (a'), et décrit dans le sens positif, se ramène au demi-méridien O′L′O, suivi du demi-méridien OQO′ (*fig.* 5); en le faisant partir du point O, on a le chemin

$$OLO' + O'L'O + OQO' + O'LO,$$

ou plus simplement

$$OQO' + O'LO,$$

qui se ramène dans le plan au chemin O*qsl*O (*fig.* 4); c'est la seconde partie du circuit de première espèce $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$ que l'on suit à partir de la fin du lacet $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, avec la racine $y_{g_{r+1}}$, ce qui conduit à la racine y_{α_r}. Quand on décrit le circuit de seconde espèce avec la racine initiale $y_{g_{r+1}}$, on arrive donc à l'entrée du lacet (a') avec la racine y_{σ_r}, qui se permute ensuite sur ce lacet en $y_{\alpha_{r+1}}$; ainsi le circuit $(C')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$ contient le lacet de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$. Il en résulte que les p lacets binaires de seconde espèce

$$(a')_{\alpha_0}^{\alpha_1}, \quad (a')_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad (a')_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0}$$

entrent respectivement dans les p circuits de seconde espèce

$$(C')_{g_1}^{g_1}, \quad (C')_{g_2}^{g_2}, \quad \ldots, \quad (C')_{g_0}^{g_0}.$$

Remarquons aussi que les lacets binaires de première espèce $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, qui, décrits dans le sens positif, conduisent à une racine déterminée $y_{g_{r+1}}$, correspondent aux lacets binaires de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$, qui entrent dans le circuit $(C')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$.

19. Voici encore quelques propriétés des circuits qui nous seront utiles. Dans n circuits de première espèce, n étant plus petit que m, peuvent entrer les p lacets binaires de première espèce de quelques-uns des systèmes circulaires; mais les lacets d'autres systèmes circulaires n'y entrent que partiellement. Désignons, en effet, par

$$(C)_1^1, \quad (C)_2^2, \quad \ldots, \quad (C)_n^n$$

ces n circuits. Supposons qu'aucun lacet n'y entre sans que tous ceux du même système circulaire n'y entrent aussi. Appelons y_{α_r} l'une quel-

conque des n racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ relatives aux n circuits; les lacets binaires positifs de seconde espèce qui conduisent de cette racine à une autre correspondent, comme nous l'avons vu, aux lacets binaires de première espèce qui entrent dans le circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$. Soit $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$ l'un de ces lacets; le lacet suivant $(a)_{g_{r+1}}^{g_{r+2}}$ du même système circulaire entre, par hypothèse, dans un autre $(C)_{\alpha_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}$ des n circuits, et le lacet de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$ conduit de la racine y_{α_r} à une autre $y_{\alpha_{r+1}}$ des n racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$. De même, le lacet précédent $(a)_{g_{r-1}}^{g_r}$ entre dans un autre $(C)_{\alpha_{r-1}}^{\alpha_{r-1}}$ des n circuits et le lacet de seconde espèce $(a')_{\alpha_{r-1}}^{\alpha_r}$, décrit dans le sens négatif, conduit aussi de la racine y_{α_r} à une autre $y_{\alpha_{r-1}}$ des n racines. Il en résulte qu'en partant de l'une de ces n racines il serait impossible de passer aux $m - n$ autres racines; la fonction algébrique y n'acquerrait pas ainsi plus de n valeurs différentes, et l'équation proposée $F(x, y) = 0$ ne serait pas irréductible [1].

Des p lacets binaires de première espèce d'un système circulaire, q sont fondamentaux, q pouvant être nul, et $p - q$ non fondamentaux. Il est impossible que les n circuits ne contiennent aucun des $p - q$ lacets non fondamentaux des systèmes qui y entrent partiellement et qu'ils les contiennent tous. Désignons, en effet, par $(V)_g^h$ la suite des lacets fondamentaux de première espèce qui conduit de la racine y_g à la racine y_h. En introduisant le même lacet fondamental un nombre pair de fois, savoir un certain nombre de fois dans un sens et le même nombre de fois en sens contraire, et réunissant les n circuits, on forme le cycle

$$(C)_1^1 + [(V)_1^2 + (C)_2^2 + (V)_2^1] + \ldots + [(V)_1^n + (C)_n^n + (V)_n^1].$$

Les systèmes circulaires qui entrent complétement dans les n circuits peuvent être supprimés. Si les n circuits ne contenaient aucun des $p - q$ lacets non fondamentaux des systèmes qui y entrent partiellement, le cycle serait formé uniquement de lacets fondamentaux et contiendrait un nombre impair de fois ceux des q lacets fondamentaux des systèmes précédents, qui entrent dans les n circuits, ce qui est impossible [2]. Si les n circuits contenaient les $p - q$ lacets non

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 217.

(2) *Ibid.*, p. 171.

fondamentaux de tous les systèmes qui y entrent partiellement, en introduisant dans le cycle la suite des p lacets binaires de chacun de ces systèmes décrits en sens rétrograde, on supprimerait ces $p-q$ lacets; ceux des q lacets fondamentaux qui y entrent déjà seraient aussi détruits, et les autres entreraient un nombre impair de fois.

On résume ce qui précède en disant qu'*un nombre de circuits moindre que la totalité contiennent au moins un lacet non fondamental d'un système circulaire, sans les contenir tous.*

Manière de former le second système de lacets fondamentaux.

20. On pourrait former un système de lacets fondamentaux de seconde espèce, comme on a formé le système des $m-1$ lacets fondamentaux de première espèce, en n'employant que des lacets binaires; mais il est préférable de se servir de lacets complexes et de les choisir de telle sorte qu'ils correspondent à des lacets non fondamentaux de première espèce.

Dans chaque système circulaire, nous remplacerons les $p-1$ lacets binaires

$$(a')^{\alpha_2}_{\alpha_1},\quad (a')^{\alpha_3}_{\alpha_2},\quad \ldots,\quad (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}},$$

qui unissent les p racines y_{α_1}, y_{α_2}, $\ldots$, y_{α_p}, par les $p-1$ lacets complexes

$$\begin{aligned}
(a')^{\alpha_2}_{\alpha_1} + (a')^{\alpha_3}_{\alpha_2} + \ldots + (a')^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}} + (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}} &= (a')^{\alpha_p}_{\alpha_1},\\
(a')^{\alpha_3}_{\alpha_2} + \ldots + (a')^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}} + (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}} &= (a')^{\alpha_p}_{\alpha_2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
(a')^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}} + (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}} &= (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-2}},\\
(a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}} &= (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}},
\end{aligned}$$

qui unissent à la racine y_{α_p} ou y_{α_0} chacune des autres. Nous désignerons d'une manière générale par $(a')^{\alpha_p}_{\alpha_r}$ ou $(a')^{\alpha_0}_{\alpha_r}$ le lacet complexe

$$(a')^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} + (a')^{\alpha_{r+2}}_{\alpha_{r+1}} + \ldots + (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}},$$

l'indice r variant de 1 à $p-1$, et nous le ferons correspondre au lacet binaire de première espèce $(a)^{g_{r+1}}_{g_r}$. Il se ramène à un chemin formé de la seconde partie du circuit $(\mathrm{C})^{\gamma_r}_{\alpha_r}$, du lacet (a) décrit $p-r-1$ fois dans le sens positif, ou $r+1$ fois dans le sens négatif, et de la première partie du circuit $(\mathrm{C})^{\gamma_0}_{\alpha_0}$. Nous dirons qu'il unit les deux racines y_{α_r} et y_{α_0}, ou les deux circuits $(\mathrm{C})^{\alpha_r}_{\alpha_r}$ et $(\mathrm{C})^{\gamma_0}_{\alpha_0}$.

Nous avons supposé (n° 15) le système des $m-1$ lacets fondamentaux de première espèce formé de lacets binaires appartenant aux trois systèmes circulaires (a), (b), (c). S'il y a d'autres systèmes circulaires, nous prendrons pour premiers lacets fondamentaux de seconde espèce les $p-1$ lacets complexes

$$(d')^{\delta_0}_{\delta_1},\quad (d')^{\delta_0}_{\delta_2},\quad \ldots,\quad (d')^{\delta_0}_{\delta_{p-1}},$$

relatifs à l'un d'eux (d), et qui correspondent aux lacets non fondamentaux de première espèce

$$(d)^{l_2}_{l_1},\quad (d)^{l_3}_{l_2},\quad \ldots,\quad (d)^{l_0}_{l_{p-1}}.$$

Ces lacets de seconde espèce unissent les p racines

$$y_{\delta_1},\quad y_{\delta_2},\quad \ldots,\quad y_{\delta_{p-1}},\quad y_{\delta_0}$$

ou les circuits de première espèce

$$(\mathrm{C})^{\delta_1}_{\delta_1},\quad (\mathrm{C})^{\delta_2}_{\delta_2},\quad \ldots,\quad (\mathrm{C})^{\delta_{p-1}}_{\delta_{p-1}},\quad (\mathrm{C})^{\delta_0}_{\delta_0},$$

qui contiennent les p lacets binaires du système (d).

D'après la loi établie au numéro précédent, ces p circuits contiennent au moins un lacet non fondamental de première espèce d'un autre système circulaire, par exemple du système (c), sans les contenir tous. Nous désignerons par $(c)^{k_1}_{k_0}$ l'un des lacets non fondamentaux qui entrent dans les circuits précédents, ce qui revient à dire que $(\mathrm{C})^{\gamma_0}_{\gamma_0}$ est l'un de ces circuits, ou y_{γ_0} l'une des p racines précédentes. Soit $(c)^{k_{r+1}}_{k_r}$ l'un des lacets non fondamentaux du système (c) qui entrent dans de nouveaux circuits; nous prendrons pour lacets fondamentaux de se-

conde espèce les lacets complexes $(c')_{\gamma_r}^{\gamma_0}$, qui correspondent aux lacets non fondamentaux $(c)_{k_r}^{k_r+1}$ de première espèce, et qui unissent à l'un des circuits précédents $(\mathrm{C})_{\gamma_0}^{\gamma_0}$ les nouveaux circuits $(\mathrm{C})_{\gamma_r}^{\gamma_r}$, et qui, par conséquent, unissent à la racine y_{γ_0}, qui est l'une des précédentes, les racines nouvelles y_{γ_r}.

Les deux groupes de circuits précédents contiennent au moins l'un des lacets non fondamentaux d'un autre système circulaire, par exemple du système (b), sans les contenir tous. Nous désignerons par $(b)_{h_0}^{h_1}$ l'un des lacets non fondamentaux de ce système qui entrent dans les circuits précédents, ce qui revient à dire que $(\mathrm{C})_{\beta_0}^{\beta_0}$ est l'un de ces circuits, ou y_{β_0} l'une des racines précédentes; soit $(b)_{h_r}^{h_r+1}$ l'un quelconque des lacets non fondamentaux du système (b) qui entrent dans de nouveaux circuits; nous prendrons pour lacets fondamentaux de seconde espèce les lacets complexes $(b')_{\beta_r}^{\beta_0}$, qui correspondent aux lacets non fondamentaux $(b)_{h_r}^{h_r+1}$ de première espèce, et qui unissent à l'un des circuits précédents $(\mathrm{C})_{\beta_0}^{\beta_0}$ les nouveaux circuits $(\mathrm{C})_{\beta_r}^{\beta_r}$, et par conséquent à la racine y_{β_0}, qui est l'une des précédentes, les racines nouvelles y_{β_r}.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on ait uni les m circuits de première espèce, et par conséquent les m racines, par $m-1$ lacets complexes de seconde espèce. D'après le mode de corrélation adopté, *les lacets fondamentaux de seconde espèce correspondent à des lacets non fondamentaux de première espèce*. Nous supposerons, pour fixer les idées, que le système des $m-1$ lacets fondamentaux de seconde espèce est formé à l'aide des trois systèmes circulaires (d'), (c'), (b').

CHAPITRE III.

PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Nombre des périodes.

21. Les périodes d'une intégrale abélienne de première espèce sont les valeurs de l'intégrale définie relatives aux différents ***cycles simples***, c'est-à-dire aux cycles formés chacun d'un certain nombre de lacets fondamentaux et d'un seul lacet non fondamental (¹). Considérons d'abord les cycles simples de première espèce. La somme des intégrales relatives aux p lacets binaires d'un même système circulaire étant nulle, la somme des périodes correspondantes est aussi nulle, et l'une d'elles est égale et de signe contraire à la somme des $p-1$ autres. On peut, d'après cela, dans la recherche du nombre des périodes, faire abstraction de l'un des lacets binaires de chaque système circulaire, ce qui réduit le nombre des lacets de première espèce à $N = \Sigma(p-1)$. Dans ce qui suit, nous conviendrons de faire abstraction des lacets désignés par $(a)_{g_0}^{g_1}$, $(b)_{h_0}^{h_1}$, $(c)_{k_0}^{k_1}$, ..., en observant que, d'après la manière dont nous avons disposé les indices, aucun d'eux n'est fondamental, ni ne correspond à un lacet complexe de seconde espèce. Nous partagerons les N lacets restants en trois catégories : 1° les $m-1$ lacets fondamentaux; les périodes correspondantes sont nulles; 2° les $N - 2(m-1) = 2p$ (n° **13**) lacets non fondamentaux qui correspondent à des lacets non fondamentaux de seconde espèce; nous représenterons par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ les périodes fournies par les cycles simples qui les contiennent; 3° les $m-1$ lacets non fondamentaux qui correspondent aux lacets fondamentaux de seconde espèce; nous allons démontrer

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 171.

que les périodes qui s'y rapportent sont égales à des sommes de multiples des $2p$ périodes ω, en d'autres termes, que les cycles simples qui contiennent ces $m-1$ derniers lacets se ramènent aux cycles simples précédents.

Considérons les circuits de première espèce. L'intégrale relative à chacun d'eux étant nulle, la somme des intégrales relatives aux lacets binaires qui entrent dans le circuit est nulle. La somme des périodes correspondantes est aussi nulle; car le circuit est un cycle, que l'on ramène à une somme de cycles simples, en introduisant des lacets fondamentaux, parcourus chacun deux fois dans des sens contraires; il suffit donc de remplacer dans la relation les intégrales relatives aux lacets binaires par les périodes correspondantes. On obtient ainsi m relations linéaires entre les périodes; mais ces m relations se réduisent à $m-1$ relations distinctes : car la réunion des m circuits contient les p lacets binaires de chaque système circulaire; si donc on ajoute les m relations membre à membre, les p termes relatifs à un même système circulaire ayant une somme nulle, on obtient une identité. Voici comment nous résoudrons ces $m-1$ relations.

Nous avons supposé le système des $m-1$ lacets fondamentaux de seconde espèce formé avec les lacets appartenant aux trois systèmes circulaires (d'), (c'), (b'). Les $p-1$ circuits $(C)^{\delta_r}_{\delta_r}$ contiennent les lacets non fondamentaux de première espèce $(d)^{l_{r+1}}_{l_r}$, qui correspondent aux lacets fondamentaux de seconde espèce $(d')^{\delta_0}_{\delta_r}$; le dernier circuit $(C)^{\delta_0}_{\delta_0}$ du même groupe contient le dernier lacet $(d)^{l_1}_{l_0}$. Les nouveaux circuits $(C)^{\gamma_r}_{\gamma_r}$ contiennent les lacets non fondamentaux de première espèce $(c)^{k_{r+1}}_{k_r}$, qui correspondent aux lacets fondamentaux de seconde espèce $(c')^{\gamma_0}_{\gamma_r}$; les autres lacets non fondamentaux du même système (c), et en particulier $(c)^{k_1}_{k_0}$, entrent dans le premier groupe de circuits. Les nouveaux circuits $(C)^{\beta_r}_{\beta_r}$ contiennent les lacets non fondamentaux de première espèce $(b)^{h_{r+1}}_{h_r}$, qui correspondent aux lacets fondamentaux de seconde espèce $(b')^{\beta_0}_{\beta_r}$; les autres lacets non fondamentaux du même système (b), et en particulier $(b)^{h_1}_{h_0}$, entrent dans les deux premiers groupes de circuits.

Considérons d'abord les circuits $(C)^{\beta_r}_{\beta_r}$, dont chacun contient un lacet $(b)^{h_{r+1}}_{h_r}$ de la troisième catégorie et ne contient aucun des lacets non fondamentaux des systèmes (d) et (c). L'intégrale relative à chacun

de ces circuits, ou à la somme des cycles simples qui le composent, étant nulle, on aura une équation, d'où l'on déduira la période $(b)_{h_r}^{h_{r+1}}$ exprimée par une somme de périodes ω. Ayant trouvé les expressions des périodes $(b)_{h_r}^{h_{r+1}}$, on aura celle de la période $(b)_{h_0}^{h_1}$.

Considérons maintenant les circuits $(C)_{\gamma_r}^{\gamma_r}$, qui contiennent chacun un lacet $(c)_{k_r}^{k_{r+1}}$ de la troisième catégorie et ne contiennent aucun des lacets du système (d), l'un d'eux pouvant contenir le lacet $(b)_{h_0}^{h_1}$. On aura des équations d'où l'on déduira les périodes $(c)_{k_r}^{k_{r+1}}$ exprimées par des sommes de multiples des périodes ω. Ayant trouvé les expressions des périodes $(c)_{k_r}^{k_{r+1}}$, on aura celle de la période $(c)_{k_0}^{k_1}$. Les circuits $(C)_{\delta_r}^{\delta_r}$, dont un peut contenir le lacet $(c)_{k_0}^{k_1}$ et un autre ou le même le lacet $(b)_{h_0}^{h_1}$, donneront enfin les périodes $(d)_{l_r}^{l_{r+1}}$ exprimées par des sommes de multiples des périodes ω.

Ainsi, les périodes relatives aux cycles simples dans lesquels entrent les $m-1$ lacets non fondamentaux de première espèce qui correspondent aux lacets fondamentaux de seconde espèce sont égales à des sommes de multiples des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$, relatives aux cycles simples dans lesquels entrent les $2p$ autres lacets non fondamentaux de première espèce. Il en résulte que tous les cycles se ramènent à ces $2p$ cycles simples, et nous arrivons à cette loi générale : *Le nombre des périodes de chacune des intégrales abéliennes de première espèce est double du nombre de ces intégrales* (n° **13**).

Périodes de seconde espèce.

22. On peut effectuer cette réduction, d'une manière analogue, à l'aide des lacets de seconde espèce. Nous partagerons de même les N lacets complexes de seconde espèce, que nous avons substitués aux lacets binaires (n° **20**), en trois catégories : 1° les $m-1$ lacets fondamentaux; 2° les $2p$ lacets non fondamentaux qui correspondent à des lacets non fondamentaux de première espèce; 3° les $m-1$ lacets non fondamentaux qui correspondent aux lacets fondamentaux de première espèce. Les cycles formés uniquement de lacets fondamentaux, contenant le même lacet un nombre pair de fois, savoir un certain nombre de fois dans un sens et le même nombre de fois dans le sens contraire, donnent

des intégrales nulles. Nous désignerons par $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{2p}$ les périodes fournies par les cycles formés chacun de lacets fondamentaux et d'un seul lacet complexe de la seconde catégorie, en supposant que ω_i et ω'_i se rapportent à des lacets correspondants de première et de seconde espèce. Nous appellerons *cycles simples* de seconde espèce ceux qui sont formés de lacets fondamentaux de seconde espèce et d'un seul lacet *binaire* de seconde espèce. Nous allons démontrer que les périodes relatives à tous ces cycles simples sont égales à des sommes de multiples des $2p$ périodes ω'.

Nous avons supposé (n° 15) le système des $m-1$ lacets fondamentaux de première espèce formé avec des lacets appartenant aux trois systèmes circulaires (a), (b), (c). Les circuits de seconde espèce

$$\text{(I)} \qquad (C')^{g_2}_{g_2}, \quad (C')^{g_3}_{g_3}, \quad \ldots, \quad (C')^{g_p}_{g_p}, \quad (C')^{g_1}_{g_1}$$

contiennent les lacets binaires de seconde espèce

$$(1) \qquad (a')^{\alpha_2}_{\alpha_1}, \quad (a')^{\alpha_3}_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad (a')^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}}, \quad (a')^{\alpha_1}_{\alpha_0},$$

dont les $p-1$ premiers correspondent aux $p-1$ premiers lacets fondamentaux de première espèce

$$(a)^{g_2}_{g_1}, \quad (a)^{g_3}_{g_2}, \quad \ldots, \quad (a)^{g_p}_{g_{p-1}}.$$

Le dernier correspond au lacet non fondamental $(a)^{g_1}_{g_0}$.

Les nouveaux circuits

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (C')^{h_{i+1}}_{h_{i+1}}, & (C')^{h_{i+2}}_{h_{i+2}}, & \ldots, & (C')^{h_{i'}}_{h_{i'}}, \\ (C')^{h_{i''}+1}_{h_{i''}+1}; & (C')^{h_{i''}+2}_{h_{i''}+2}, & \ldots, & (C')^{h_{i'''}}_{h_{i'''}}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \right.$$

contiennent les lacets binaires de seconde espèce

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (b')^{\beta_{i+1}}_{\beta_i}, & (b')^{\beta_{i+2}}_{\beta_{i+1}}, & \ldots, & (b')^{\beta_{i'}}_{\beta_{i'-1}}, \\ (b')^{\beta_{i''}+1}_{\beta_{i''}}, & (b')^{\beta_{i''}+2}_{\beta_{i''}+1}, & \ldots, & (b')^{\beta_{i'''}}_{\beta_{i'''}-1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

qui correspondent aux lacets fondamentaux de première espèce

$$
\begin{array}{llll}
(b)_{h_i}^{h_{i+1}}, & (b)_{h_{i+1}}^{h_{i+2}}, & \ldots, & (b)_{h_{i'}-1}^{h_{i'}}, \\
(b)_{h_{i''}}^{h_{i''}+1}, & (b)_{h_{i''}+1}^{h_{i''}+2}, & \ldots, & (b)_{h_{i'''}-1}^{h_{i'''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}
\end{array}
$$

et nous remarquons que les lacets binaires de seconde espèce

$$
(2)' \qquad \left\{
\begin{array}{llll}
(b')_{\beta_0}^{\beta_1}, & (b')_{\beta_1}^{\beta_2}, & \ldots, & (b')_{\beta_{i-1}}^{\beta_i}, \\
(b')_{\beta_{i'}}^{\beta_{i'}+1}, & (b')_{\beta_{i'}+1}^{\beta_{i'}+2}, & \ldots, & (b')_{\beta_{i''}-1}^{\beta_{i''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}
\end{array}
\right.
$$

qui correspondent aux lacets non fondamentaux de première espèce

$$
\begin{array}{llll}
(b)_{h_0}^{h_1}, & (b)_{h_1}^{h_2}, & \ldots, & (b)_{h_{i-1}}^{h_i}, \\
(b)_{h_{i'}}^{h_{i'}+1}, & (b)_{h_{i'}+1}^{h_{i'}+2}, & \ldots, & (b)_{h_{i''}-1}^{h_{i''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}
\end{array}
$$

entrent dans les circuits du premier groupe (I).

De même, les nouveaux circuits

$$
(\mathrm{III}) \qquad \left\{
\begin{array}{llll}
(\mathrm{C}')_{k_{i+1}}^{k_{i+1}}, & (\mathrm{C}')_{k_{i+2}}^{k_{i+2}}, & \ldots, & (\mathrm{C}')_{k_{i'}}^{k_{i'}}, \\
(\mathrm{C}')_{k_{i''}+1}^{k_{i''}+1}, & (\mathrm{C}')_{k_{i''}+2}^{k_{i''}+2}, & \ldots, & (\mathrm{C}')_{k_{i'''}}^{k_{i'''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}
\right.
$$

contiennent les lacets binaires de seconde espèce

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{array}{llll}
(c')_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}}, & (c')_{\gamma_{i+1}}^{\gamma_{i+2}}, & \ldots, & (c')_{\gamma_{i'}-1}^{\gamma_{i'}}, \\
(c')_{\gamma_{i''}}^{\gamma_{i''}+1}, & (c')_{\gamma_{i''}+1}^{\gamma_{i''}+2}, & \ldots, & (c')_{\gamma_{i'''}-1}^{\gamma_{i'''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}
\end{array}
\right.
$$

qui correspondent aux lacets fondamentaux de première espèce

$$
\begin{array}{llll}
(c)_{k_i}^{k_{i+1}}, & (c)_{k_{i+1}}^{k_{i+2}}, & \ldots, & (c)_{k_{i'}-1}^{k_{i'}}, \\
(c)_{k_{i''}}^{k_{i''}+1}, & (c)_{k_{i''}+1}^{k_{i''}+2}, & \ldots, & (c)_{k_{i'''}-1}^{k_{i'''}}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}
\end{array}
$$

et les lacets de seconde espèce

$$(3)' \quad \left\{ \begin{array}{llll} (c')^{\gamma_1}_{\gamma_0}, & (c')^{\gamma_2}_{\gamma_1}, & \ldots, & (c')^{\gamma_i}_{\gamma_{i-1}}, \\ (c')^{\gamma_{i'+1}}_{\gamma_{i'}}, & (c')^{\gamma_{i'+2}}_{\gamma_{i'+1}}, & \ldots, & (c')^{\gamma_{i''}}_{\gamma_{i''-1}}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

qui correspondent aux lacets non fondamentaux de première espèce

$$\begin{array}{llll} (c)^{k_1}_{k_0}, & (c)^{k_2}_{k_1}, & \ldots, & (c)^{k_i}_{k_{i-1}}, \\ (c)^{k_{i'+1}}_{k_{i'}}, & (c)^{k_{i'+2}}_{k_{i'+1}}, & \ldots, & (c)^{k_{i''}}_{k_{i''-1}}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

entrent dans les deux premiers groupes de circuits (I) et (II).

Comme on a, d'une manière générale,

$$(a')^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} = (a')^{\alpha_0}_{\alpha_r} - (a')^{\alpha_0}_{\alpha_{r+1}},$$

la période relative au cycle simple qui contient un lacet binaire $(a')^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$ est égale à la différence des périodes relatives aux deux lacets complexes $(a')^{\alpha_0}_{\alpha_r}$ et $(a')^{\alpha_0}_{\alpha_{r+1}}$. Pour tous les systèmes circulaires suivants (d'), (e'), ..., les périodes relatives aux lacets complexes étant nulles, ou faisant partie des $2p$ périodes ω', les périodes relatives aux lacets binaires sont égales à des différences de périodes ω'.

Les circuits du troisième groupe (III), ne contenant aucun des lacets (a') et (b'), donnent des équations d'où l'on déduira les périodes relatives aux lacets binaires (3), exprimées par des sommes de périodes relatives aux lacets binaires (d'), (e'), ..., et, par conséquent, en vertu de la remarque précédente, par des sommes de multiples des périodes ω'. On en déduira successivement les périodes relatives aux lacets complexes correspondants, à l'aide des relations

$$\begin{aligned} (c')^{\gamma_0}_{\gamma_{i'-1}} &= (c')^{\gamma_{i'}}_{\gamma_{i'-1}} + (c')^{\gamma_0}_{\gamma_{i'}}, \\ (c')^{\gamma_0}_{\gamma_{i'-2}} &= (c')^{\gamma_{i-1}}_{\gamma_{i'-2}} + (c')^{\gamma_0}_{\gamma_{i'-1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (c')^{\gamma_0}_{\gamma_i} &= (c')^{\gamma_{i+1}}_{\gamma_i} + (c')^{\gamma_0}_{\gamma_{i+1}}, \end{aligned}$$

ou des relations analogues pour chaque sous-groupe; car la période

relative au dernier terme de la première équation est égale à zéro ou à l'une des périodes ω'. On obtiendra ensuite les périodes relatives aux lacets binaires $(3)'$ à l'aide des relations

$$\begin{aligned}
(c')_{\gamma_0}^{\gamma_1} &= -(c')_{\gamma_1}^{\gamma_0},\\
(c')_{\gamma_1}^{\gamma_2} &= \quad (c')_{\gamma_1}^{\gamma_0} - (c')_{\gamma_2}^{\gamma_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
(c')_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} &= \quad (c')_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_0} - (c')_{\gamma_i}^{\gamma_0};
\end{aligned}$$

car tous les termes des seconds membres sont égaux à zéro ou à des périodes ω', excepté le dernier, qui est une somme de périodes ω'. Les périodes relatives à tous les cycles simples qui contiennent les lacets binaires du système (c') seront ainsi exprimées par des sommes de multiples des périodes ω'.

On se servira ensuite des circuits du second groupe (II), qui ne contiennent aucun des lacets binaires du système (a'), mais ceux des systèmes (b'), (c'), (d'), ...; on en déduira les périodes relatives aux lacets binaires (2), exprimées par des sommes de multiples des périodes ω'. Ces périodes étant trouvées, on calculera, comme précédemment, celles relatives aux lacets complexes correspondants et ensuite celles relatives aux lacets binaires $(2)'$. Les périodes relatives à tous les cycles simples qui contiennent les lacets binaires du système (b') seront ainsi exprimées par des sommes de multiples des périodes ω'.

Les circuits du premier groupe (I) donneront enfin les périodes relatives aux cycles simples qui contiennent les lacets binaires du système (a').

On conclut de ce qui précède que toutes les périodes des intégrales abéliennes de première espèce se ramènent, pour chacune d'elles, aux $2p$ périodes $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{2p}$.

23. Nous avons démontré (n° **21**) que toute période d'une intégrale abélienne de première espèce est égale à une somme de multiples des $2p$ périodes ω, fournies par les cycles simples de première espèce, dans lesquels entrent les lacets non fondamentaux qui correspondent à des lacets non fondamentaux de seconde espèce. Les périodes ω' jouissent

évidemment de cette propriété, et l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = c_{11}\omega_1 + c_{12}\omega_2 + \ldots + c_{1,2p}\omega_{2p}, \\ \omega'_2 = c_{21}\omega_1 + c_{22}\omega_2 + \ldots + c_{2,2p}\omega_{2p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{2p} = c_{2p,1}\omega_1 + c_{2p,2}\omega_2 + \ldots + c_{2p,2p}\omega_{2p}, \end{cases}$$

les coefficients c étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. Nous avons démontré ensuite que toute période de l'intégrale abélienne est égale à une somme de multiples des $2p$ périodes ω', fournies par les cycles relatifs aux lacets complexes non fondamentaux de seconde espèce, qui correspondent à des lacets non fondamentaux de première espèce. D'après cela, les valeurs des périodes ω, déduites des relations (4), sont égales à des sommes de multiples des périodes ω'; il en résulte que le déterminant des coefficients c est égal à ± 1.

Nous représenterons les relations (4) par la formule

$$(5)\qquad \omega'_i = \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik}\,\omega_k,$$

en faisant varier les deux indices i et k de 1 à $2p$.

Cas où tous les points critiques sont du second ordre.

24. Lorsque la courbe $F(x, y) = 0$ n'a que des points doubles, ou, du moins, lorsque, dans la distribution des racines autour des points critiques, chacun des systèmes circulaires ne comprend que deux racines ([1]), la formation des deux systèmes de lacets fondamentaux, et l'évaluation du nombre des périodes, deviennent très-simples. Chaque système circulaire comprend deux lacets binaires, sur chacun desquels se permutent deux racines. On prendra pour premier lacet fondamental de première espèce le lacet $(a)_{g_1}^{g_2}$, qui unit les deux racines y_{g_1} et y_{g_2}; l'autre lacet binaire $(a)_{g_2}^{g_1}$ sera non fondamental. Un second système circulaire (b) contient l'une des deux racines précédentes et une autre

([1]) C'est le cas traité par MM. Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* (1866).

différente; on désignera par y_{h_1} la racine commune et l'on prendra pour second lacet fondamental le lacet $(b)_{h_1}^{h_2}$, qui unit l'une des deux premières racines à la racine nouvelle y_{h_2}; l'autre lacet $(b)_{h_0}^{h_1}$ sera non fondamental. Un troisième système circulaire (c) contient l'une des trois racines précédentes et une autre différente; on désignera par y_{k_1} la racine commune et l'on prendra pour troisième lacet fondamental le lacet $(c)_{k_1}^{k_2}$, qui unit l'une des trois premières racines à la racine nouvelle y_{k_2}; l'autre lacet $(c)_{k_0}^{k_1}$ sera non fondamental, et ainsi de suite. Par exemple, si $m = 3$, le système des lacets fondamentaux de première espèce sera formé des trois lacets

$$(a)_{g_1}^{g_2},\quad (b)_{h_1}^{h_2},\quad (c)_{k_1}^{k_2}.$$

Il n'y a pas lieu ici de parler de lacets complexes. Un circuit de première espèce contenant au moins un lacet non fondamental d'un système circulaire sans les contenir tous (n° **19**), ce lacet appartiendra à un nouveau système circulaire (d). On prendra pour premier lacet fondamental de seconde espèce le lacet $(d')_{\delta_1}^{\delta_0}$, qui unit les deux racines y_{δ_1} et y_{δ_0}, ou les deux circuits $(C)_{\delta_1}^{\delta_1}$ et $(C)_{\delta_0}^{\delta_0}$. Ces deux circuits contiennent un lacet $(e)_{l_0}^{l_1}$ d'un nouveau système circulaire (e), sans contenir l'autre lacet de ce système; on prendra comme second lacet fondamental de seconde espèce le lacet $(e')_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0}$, qui unit à l'un des circuits précédents $(C)_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}$ le nouveau circuit $(C)_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1}$, et, par conséquent, à la racine y_{ε_0}, qui est l'une des précédentes, la nouvelle racine y_{ε_1}. Les trois circuits contiennent un lacet $(f)_{m_0}^{m_1}$ d'un nouveau système circulaire (f), sans contenir l'autre lacet de ce système; on prendra comme troisième lacet fondamental de seconde espèce le lacet $(f')_{\zeta_1}^{\zeta_0}$, qui unit à l'une des racines précédentes y_{ζ_0} la racine nouvelle y_{ζ_1}. Le système des lacets fondamentaux de seconde espèce sera formé des trois lacets

$$(d')_{\delta_1}^{\delta_0},\quad (e')_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0},\quad (f')_{\zeta_1}^{\zeta_0}.$$

On remarque que, dans le cas actuel, les deux systèmes de lacets fondamentaux correspondent à des points critiques différents, ou, du moins, à des systèmes circulaires différents.

CHAPITRE IV.

RELATION ENTRE LES PÉRIODES DE DEUX INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

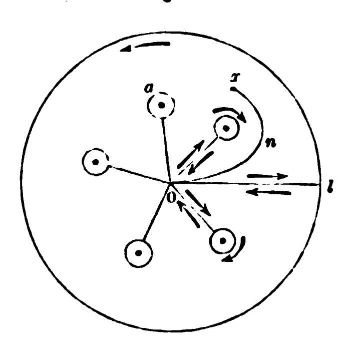
Loi préliminaire.

25. Soit

$$u = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q(x, y)}{F'_y(x, y)} dx$$

une intégrale de première espèce. Considérons le *contour simple* ([1]) formé par la droite Ol, la grande circonférence de centre O, et la suite des lacets de première espèce relatifs aux points critiques (*fig.* 6). En

Fig. 6.



chaque point x du plan, l'intégrale u a m valeurs augmentées de multiples des périodes ([2]); appelons u_0 la valeur que l'on obtient quand, partant de l'origine x_0, avec la racine y_0, on suit un chemin Onx,

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 128.
([2]) *Ibid.*, p. 173.

tangent à la droite Ol et allant au point x situé dans la partie du plan enveloppée par le contour, sans franchir aucune partie de ce contour, et $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ les valeurs données par ce même chemin, précédé des suites de lacets fondamentaux de seconde espèce qui conduisent de la racine initiale y_0 aux autres racines $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Les quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, ainsi définies, seront des fonctions holomorphes de la variable x, dans la partie du plan enveloppé par le contour.

Remarquons que le chemin Onx peut être remplacé par un autre chemin, tangent aussi à la droite Ol, mais de l'autre côté de cette droite, et allant du point O au point x, sans franchir aucune partie du contour; car, sur la sphère, ces deux chemins se ramènent l'un à l'autre.

Sur le lacet (a), décrit de droite à gauche, se permutent circulairement p racines $y_{g_1}, y_{g_2}, \ldots, y_{g_p}$, ce qui nous a conduit à regarder ce lacet comme la réunion de p lacets binaires

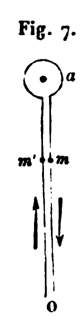
$$(a)_{g_1}^{g_2}, \quad (a)_{g_2}^{g_3}, \quad \ldots, \quad (a)_{g_{p-1}}^{g_p}, \quad (a)_{g_0}^{g_1},$$

qui entrent respectivement dans les p circuits

$$(\mathrm{C})_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \quad (\mathrm{C})_{\alpha_2}^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad (\mathrm{C})_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}, \quad (\mathrm{C})_{\alpha_0}^{\alpha_0}.$$

Sur le lacet (a), en deux points infiniment rapprochés m et m', pla-

Fig. 7.



cés sur les deux bords opposés de la coupure (*fig.* 7), chacune des p fonctions

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_{p-1}}, \quad u_{\alpha_0}$$

acquiert deux valeurs différentes. Pour la fonction $u_{\alpha_{r+1}}$ en m et la

fonction u_{α_r} en m', la valeur de y est la même; c'est celle que l'on obtient quand on décrit directement la droite Om ou Om', en partant du point O avec la racine $y_{g_{r+1}}$; ces deux valeurs de l'intégrale u se rapportant à un même point analytique, leur différence est égale à une période, et nous remarquons que cette différence reste constante tout le long de la coupure; car, lorsque les deux points infiniment voisins m et m' se meuvent sur la droite Oa, les deux intégrales éprouvent la même variation.

Pour trouver cette différence, appelons U'_i l'intégrale relative à la suite des lacets fondamentaux de seconde espèce qui conduit de la racine y_0 à la racine y_i, $C_{\alpha_r}^{g_r}$ l'intégrale relative à la première partie du circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$, décrite dans le sens positif du circuit, depuis l'origine du circuit jusqu'à l'entrée du lacet (a), $C_{\alpha_r}^{g_{r+1}}$ l'intégrale relative à la seconde partie de ce même circuit que l'on remonte depuis la fin du circuit jusqu'au lacet (a), et I_i^m la partie de l'intégrale relative à la droite Om, quand on part du point O avec la racine y_i. On obtient la valeur de la fonction $u_{\alpha_{r+1}}$ au point m en suivant la première partie du circuit $(C)_{\alpha_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}$ jusqu'à l'entrée du lacet (a), puis la droite Om avec la racine $y_{g_{r+1}}$; la fonction $u_{\alpha_{r+1}}$ acquiert donc au point m la valeur

$$u_{\alpha_{r+1}} = U'_{\alpha_{r+1}} + C_{\alpha_{r+1}}^{g_{r+1}} + I_{g_{r+1}}^m.$$

On obtient de même la valeur de la fonction u_{α_r} au point m' en remontant la seconde partie du circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$ jusqu'au lacet (a), puis décrivant la droite Om', avec la même racine $y_{g_{r+1}}$; la fonction u_{α_r} acquiert donc au point m' la valeur

$$u'_{\alpha_r} = U'_{\alpha_r} + C_{\alpha_r}^{g_{r+1}} + I_{g_{r+1}}^{m'}.$$

On déduit de là

$$u'_{\alpha_r} - u_{\alpha_{r+1}} = U'_{\alpha_r} + \left(C_{\alpha_r}^{g_{r+1}} + C_{g_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}\right) - U'_{\alpha_{r+1}}.$$

En désignant par $a'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$ l'intégrale relative au lacet binaire de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$, on a

$$a'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} = C_{\alpha_r}^{g_{r+1}} + C_{g_{r+1}}^{\alpha_{r+1}};$$

car ce lacet binaire, décrit dans le sens positif, se ramène, comme

nous l'avons vu (nº 17), à la seconde partie du circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$, que l'on remonte jusqu'au lacet (a), et à la première partie du circuit $(C)_{\alpha_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}$, que l'on remonte depuis le lacet (a), en laissant de côté ce lacet. Si donc on représente par $A_{\alpha_r}^{'\alpha_{r+1}}$ la période relative au cycle *simple* de seconde espèce qui contient le lacet binaire $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$ (nº 22), la relation précédente devient

$$(1) \qquad u'_{\alpha_r} - u_{\alpha_{r+1}} = A_{\alpha_r}^{'\alpha_{r+1}}.$$

Quand on décrit le contour entier dans le sens positif, on parcourt d'abord le bord m' de gauche de la coupure Oa, puis le bord m de droite; pour cette raison, nous appellerons le bord *m' premier bord*, l'autre *second bord*. La relation (1) signifie que *la différence des valeurs de la fonction* u_{α_r} *sur le premier bord du lacet* (a) *et de la fonction* $u_{\alpha_{r+1}}$ *sur le second bord est égale à la période* $A_{\alpha_r}^{'\alpha_{r+1}}$.

Relation entre les périodes de deux intégrales.

26. Soit

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_1(x, y)}{F'_y(x, y)} dx$$

une seconde intégrale de première espèce, à laquelle nous appliquerons les mêmes notations qu'à la précédente.

Les fonctions

$$u_0 \frac{dv_0}{dx}, \quad u_1 \frac{dv_1}{dx}, \quad \ldots, \quad u_{m-1} \frac{dv_{m-1}}{dx}$$

étant holomorphes dans la partie du plan enveloppée par le contour que nous venons de définir (*fig.* 6), chacune des intégrales

$$\int u_h \frac{dv_h}{dx} dx, \quad \text{ou} \quad \int u_h dv_h,$$

prise sur le contour entier, est égale à zéro (Note A), et, par consé-

quent, leur somme

$$(2) \qquad P = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int u_h \, dv_h$$

est aussi égale à zéro.

La partie de chacune des intégrales relative au circuit formé par la grande circonférence et la droite Ol étant nulle, il suffit de considérer les lacets relatifs aux points critiques. Le lacet (a), borné à un seul système circulaire (n° **15**), entre dans p intégrales; quand on décrit le contour dans le sens positif, le lacet est parcouru de gauche à droite (*fig.* 7). La partie relative à ce lacet dans les p intégrales est

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a u'_{\alpha_r} \, dv'_{\alpha_r} + \sum_{r=1}^{r=p} \int_a^0 u_{\alpha_r} \, dv_{\alpha_r},$$

ou, en vertu de la relation (1), et à cause de la permutation circulaire,

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a (u_{\alpha_{r+1}} + A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}) \, dv_{\alpha_{r+1}} - \sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a u_{\alpha_{r+1}} \, dv_{\alpha_{r+1}}$$
$$= \sum_{r=1}^{r=p} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} \int_0^a dv_{\alpha_{r+1}} = \sum_{r=1}^{r=p} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} I_{g_{r+1}},$$

I_g désignant la partie de l'intégrale v relative à la droite Oa, quand on part du point O avec la racine y_g. Si l'on en retranche la quantité nulle

$$\sum_{r=1}^{r=p} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r},$$

multipliée par I_{g_1}, cette quantité devient

$$(3) \qquad - \sum_{r=1}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} (I_{g_1} - I_{g_{r+1}}).$$

Appelons V_g la partie de l'intégrale v relative à la suite des lacets

fondamentaux de première espèce qui conduit de la racine y_0 à la racine y_g, $b_{g_r}^{g_{r+1}}$ la partie de la même intégrale relative au lacet binaire $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, et $B_{g_r}^{g_{r+1}}$ la période correspondante. Comme on a

$$\begin{aligned} I_{g_1} - I_{g_{r+1}} &= (I_{g_1} - I_{g_2}) + (I_{g_2} - I_{g_3}) + \ldots + (I_{g_r} - I_{g_{r+1}}) \\ &= b_{g_1}^{g_2} + b_{g_2}^{g_3} + \ldots + b_{g_r}^{g_{r+1}}, \end{aligned}$$

la quantité (3) prend la forme

$$(4) \qquad -\sum_{r=1}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} (b_{g_1}^{g_2} + b_{g_2}^{g_3} + \ldots + b_{g_r}^{g_{r+1}}).$$

Telle est la partie qui correspond au lacet (a), pour un système circulaire; en faisant la somme des quantités analogues qui se rapportent à tous les systèmes circulaires relatifs aux différents points critiques, on a

$$(5) \qquad P = -\mathbf{S} \sum_{r=1}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} (b_{g_1}^{g_2} + b_{g_2}^{g_3} + \ldots + b_{g_r}^{g_{r+1}}),$$

le nouveau signe somme s'étendant à tous ces systèmes.

27. Puisque

$$B_{g_r}^{g_{r+1}} = V_{g_r} + b_{g_r}^{g_{r+1}} - V_{g_{r+1}},$$

d'où

$$b_{g_r}^{g_{r+1}} = B_{g_r}^{g_{r+1}} + V_{g_{r+1}} - V_{g_r},$$

$$b_{g_1}^{g_2} + b_{g_2}^{g_3} + \ldots + b_{g_r}^{g_{r+1}} = (B_{g_1}^{g_2} + B_{g_2}^{g_3} + \ldots + B_{g_r}^{g_{r+1}}) + V_{g_{r+1}} - V_{g_1},$$

cette expression devient

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} P = &-\mathbf{S} \sum_{r=1}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} (B_{g_1}^{g_2} + B_{g_2}^{g_3} + \ldots + B_{g_r}^{g_{r+1}}) \\ &-\mathbf{S} \sum_{r=0}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} V_{g_{r+1}}. \end{aligned} \right.$$

La seconde partie est une fonction linéaire et homogène des m quan-

tités $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$. La quantité $V_{g_{r+1}}$ entre dans les parties provenant de différents systèmes circulaires, ceux qui contiennent la racine $y_{g_{r+1}}$; dans chacun de ces systèmes, il y a un lacet binaire de première espèce, tel que $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, qui conduit à cette racine; à ce lacet de première espèce correspond le lacet de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$; mais on sait (n° **18**) que l'ensemble des lacets binaires de seconde espèce qui correspondent aux différents lacets binaires de première espèce qui conduisent à la racine $y_{g_{r+1}}$ constituent le circuit de seconde espèce $(C')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$; la somme des valeurs $a'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$ de l'intégrale u relatives à ces lacets est égale à zéro, et, par conséquent, celle des périodes correspondantes $A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$, par laquelle est multiplié $V_{g_{r+1}}$, est aussi égale à zéro. La seconde partie de l'expression (6), ordonnée par rapport à $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$, ayant ainsi tous ses coefficients nuls, et, par conséquent, étant identiquement nulle, l'expression se réduit à

$$(7) \qquad P = -\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}\left(B^{g_2}_{g_1} + B^{g_3}_{g_2} + \ldots + B^{g_{r+1}}_{g_r}\right).$$

Si on l'ordonne par rapport aux périodes B de l'intégrale v, on a

$$P = -\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} B^{g_{r+1}}_{g_r}\left(A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} + A'^{\alpha_{r+2}}_{\alpha_{r+1}} + \ldots + A'^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}}\right),$$

ou, plus simplement,

$$(8) \qquad P = -\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} B^{g_{r+1}}_{g_r} A'^{\alpha_0}_{\alpha_r},$$

en remarquant que la quantité entre parenthèses est la période de l'intégrale u, relative au cycle de seconde espèce qui contient le lacet complexe $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_0}$ (n° **20**).

28. Cette expression renferme les périodes des deux intégrales u et v. Les périodes $B^{g_{r+1}}_{g_r}$ de l'intégrale v se rapportent aux lacets binaires de première espèce $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, les périodes $A'^{\alpha_0}_{\alpha_r}$ de l'intégrale u se rapportent aux lacets complexes de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_0}$ correspondants.

Chaque système circulaire fournit $p - 1$ termes dans l'expression, savoir

$$\mathrm{B}_{g_1}^{g_2} \mathrm{A}'^{\alpha_0}_{\alpha_1} + \mathrm{B}_{g_2}^{g_3} \mathrm{A}'^{\alpha_0}_{\alpha_2} + \ldots + \mathrm{B}_{g_{p-1}}^{g_p} \mathrm{A}'^{\alpha_0}_{\alpha_{p-1}}.$$

Nous avons formé les deux systèmes de lacets fondamentaux de première et de seconde espèce, de manière qu'aucun des seconds ne corresponde à un des premiers. Si q lacets binaires de première espèce du système (a) sont fondamentaux, les q termes correspondants sont nuls par le facteur B; si q' lacets complexes de seconde espèce du système (a') sont fondamentaux, q' autres termes sont nuls par le facteur A'. Il reste donc, pour ce point critique, $p - 1 - q - q'$ termes différents de zéro, ce qui fait en tout un nombre de termes marqué par

$$\Sigma(p-1) - \Sigma q - \Sigma q' = \mathrm{N} - 2(m-1) = 2\mathrm{p},$$

c'est-à-dire un nombre de termes égal au nombre des périodes des intégrales abéliennes de première espèce.

Les deux facteurs, qui forment chacun des termes de l'expression, se rapportent aux lacets non fondamentaux correspondants de première et de seconde espèce. Si l'on désigne par ω_i et ω'_i les deux systèmes équivalents de périodes de l'intégrale u, et par ε_i et ε'_i celles de l'intégrale v, on a

$$(9) \qquad \mathrm{P} = -\sum_{i=1}^{i=2\mathrm{p}} \varepsilon_i \omega'_i,$$

et, en remplaçant les périodes ω'_i par leurs valeurs en fonction des périodes ω_i (n° **23**),

$$(10) \qquad \mathrm{P} = -\sum_{i=1}^{i=2\mathrm{p}} \sum_{k=1}^{k=2\mathrm{p}} c_{ik} \varepsilon_i \omega_k.$$

29. Nous avons trouvé la valeur de la quantité

$$\mathrm{P} = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int u_h \, dv_h,$$

en fonction des périodes des deux intégrales abéliennes u et v. Repré-

sentons de même par Q l'expression

$$Q = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int v_h \, du_h, \tag{11}$$

que l'on déduit de la précédente en permutant les deux intégrales u et v; nous obtiendrons par le même raisonnement

$$Q = -\sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik} \, \omega_i \, \varepsilon_k,$$

ou, en permutant les deux indices i et k,

$$Q = -\sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ki} \, \omega_k \, \varepsilon_i. \tag{12}$$

En intégrant par parties, et remarquant que la quantité $u_h v_h$ reprend à la fin du contour la valeur qu'elle avait au commencement, on a

$$\int u_h \, dv_h = -\int v_h \, du_h,$$

et, par suite,

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} \int u_h \, dv_h = -\sum_{h=0}^{h=m-1} \int v_h \, du_h,$$

c'est-à-dire

$$P = -Q.$$

Ainsi les deux quantités P et Q sont égales et de signes contraires, quelles que soient les valeurs des périodes; on en conclut, d'après les expressions (10) et (12), que les coefficients c_{ik} et c_{ki} sont égaux et de signes contraires, et l'on a

$$c_{ki} = -c_{ik}, \quad c_{ii} = 0, \tag{13}$$

quels que soient les indices i et k.

D'après cela, le déterminant des nombres c_{ik} est un déterminant *gauche*. Mais on sait qu'un pareil déterminant est égal au carré d'une fonction rationnelle de ses éléments. Le déterminant des nombres c_{ik} est donc égal à $+1$.

La relation qui existe entre les périodes des deux intégrales u et v est

$$(14) \qquad P = \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik}\,\omega_i\,\varepsilon_k = 0;$$

elle est linéaire et homogène par rapport aux périodes de la première intégrale, et aussi par rapport à celles de la seconde:

CHAPITRE V.

PÉRIODES NORMALES.

Transformation générale des périodes.

30. Imaginons que l'on remplace le système des 2p périodes ω de l'intégrale u par un système équivalent de 2p nouvelles périodes Ω, définies par les relations

$$(1) \qquad \omega_i = a_{i1}\Omega_1 + a_{i2}\Omega_2 + \ldots + a_{i,2p}\Omega_{2p} = \sum_{g=1}^{g=2p} a_{ig}\Omega_g,$$

dans lesquelles les indices i et g varient de 1 à 2p, et les coefficients a_{ig} sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, dont le déterminant est égal à ±1. Si l'on désigne par $\mathcal{E}$ les nouvelles périodes correspondantes de l'intégrale v, on a de même

$$(2) \qquad \varepsilon_k = a_{k1}\mathcal{E}_1 + a_{k2}\mathcal{E}_2 + \ldots + a_{k,2p}\mathcal{E}_{2p} = \sum_{h=1}^{h=2p} a_{kh}\mathcal{E}_h.$$

L'expression

$$(3) \qquad P = \sum_{i=1}^{i=2p}\sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik}\,\omega_i\,\varepsilon_k,$$

trouvée dans le Chapitre précédent, devient, par la substitution,

$$P = \sum\nolimits_{i,k,g,h} c_{ik}\,a_{ig}\,a_{kh}\,\Omega_g\,\mathcal{E}_h = \sum\nolimits_{g,h}\left[\Omega_g\,\mathcal{E}_h \sum\nolimits_{i,k} c_{ik}\,a_{ig}\,a_{kh}\right],$$

les quatre indices i, k, g, h variant de 1 à 2p. Si l'on pose

$$(4) \qquad c'_{gh} = \sum\nolimits_{i,k} c_{ik}\,a_{ig}\,a_{kh},$$

cette expression prend la forme

$$(5) \qquad P = \sum_{g=1}^{g=2p} \sum_{h=1}^{h=2p} c'_{gh} \Omega_g \mathcal{E}_h,$$

semblable à la forme (3).

Les nouveaux coefficients c' jouissent des mêmes propriétés que les coefficients c, car, si l'on pose

$$(6) \qquad c''_{kg} = \sum_{i=1}^{i=2p} c_{ik} a_{ig},$$

on a

$$(7) \qquad c'_{gh} = \sum_{k=1}^{k=2p} c''_{kg} a_{kh}.$$

Le déterminant des nombres c'' est égal au déterminant des nombres c multiplié par celui des nombres a; de même, le déterminant des nombres c' est égal à celui des nombres c'' multiplié par celui des nombres a; le déterminant des nombres c' est donc égal à celui des nombres c multiplié par le carré de celui des nombres a, c'est-à-dire par $+1$; ainsi le déterminant des nombres c' est égal à celui des nombres c, et, par conséquent, égal à $+1$. Ce déterminant est aussi un déterminant gauche; car, si dans la formule (4) on permute les deux indices i et k, on a

$$c'_{gh} = \sum_{i,k} c_{ki} a_{kg} a_{ih} = -\sum_{i,k} c_{ik} a_{ih} a_{kg} = -c'_{hg}.$$

Si, dans la formule (5) du n° **23**,

$$\omega'_k = \sum_{i=1}^{i=2p} c_{ki} \omega_i = -\sum_{i=1}^{i=2p} c_{ik} \omega_i,$$

on remplace ω_i par sa valeur donnée par la formule (1), il vient

$$\omega'_k = -\sum_{i,g} c_{ik} a_{ig} \Omega_g = -\sum_g \left[\Omega_g \sum_i c_{ik} a_{ig}\right],$$

et, par suite, en vertu de la formule (6),

$$(8) \qquad \omega'_k = -\sum_{g=1}^{g=2p} c''_{kg} \Omega_g.$$

Transformation simple.

31. Soient r et s deux nombres entiers fixes et différents, appartenant à la suite des $2p$ premiers nombres, et n un nombre entier arbitraire, positif ou négatif. Considérons la transformation particulière définie par les formules

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega_i = \Omega_i, \\ \omega_r = \Omega_r + n\Omega_s, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Omega_i = \omega_i, \\ \Omega_r = \omega_r - n\omega_s, \end{cases}$$

dans lesquelles l'indice i reçoit les valeurs consécutives 1, 2, 3, ..., $2p$, excepté $i = r$. Pour toutes les valeurs de i, même pour $i = r$, on a $a_{ii} = 1$, et, pour toutes les valeurs de i et k différentes entre elles, on a $a_{ik} = 0$, excepté $a_{rs} = n$. Le déterminant des nombres a est ici égal à $+1$. La formule (6), si g est différent de s, donne $c''_{kg} = c_{gk}$, et la formule (7), si h est aussi différent de s, $c'_{gh} = c''_{hg} = c_{gh}$; mais si $h = s$, g étant différent de s, on a

$$c'_{gs} = c''_{sg} + nc''_{rg} = c_{gs} + nc_{gr},$$

et par suite

$$c'_{sh} = -c'_{hs} = c_{sh} + nc_{rh}.$$

Il en résulte que l'on déduit le déterminant des nombres c' de celui des nombres c, en ajoutant aux éléments de la ligne de rang s ceux de la ligne de rang r multipliés par n, et aux éléments de la colonne de rang s ceux de la colonne de rang r multipliés aussi par n.

Réduction du déterminant gauche à la forme canonique.

32. Nous allons montrer maintenant comment on peut, par une série de transformations simples, ramener à la forme canonique le déterminant gauche des nombres c, savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,2p} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & \dots & c_{2,2p} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & \dots & c_{3,2p} \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ c_{2p,1} & \dots & . & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit c_{1r} le plus petit élément en valeur absolue de la première ligne, abstraction faite des éléments égaux à zéro. En divisant un autre élément c_{1s} de cette première ligne par c_{1r}, appelant n le quotient et c'_{1s} un reste plus petit que le diviseur, en valeur absolue, on a

$$c'_{1s} = c_{1s} - nc_{1r}.$$

Si l'on effectue la transformation qui consiste à ajouter aux éléments de la colonne de rang s ceux de la colonne de rang r multipliés par $-n$, et aux éléments de la ligne de rang s ceux de la ligne de rang r multipliés aussi par $-n$, on remplacera l'élément c_{1s} de la première ligne par c'_{1s}, sans changer les autres éléments de cette première ligne. Par une série de transformations semblables, on remplacera tous les éléments de la première ligne différents de zéro par d'autres éléments inférieurs au plus petit d'entre eux en valeur absolue. Une seconde série de transformations remplacera ceux de ces nouveaux éléments qui sont différents de zéro par d'autres inférieurs au plus petit d'entre eux en valeur absolue, et ainsi de suite; mais cette suite d'opérations revient à la recherche du plus grand commun diviseur des éléments de la première ligne du déterminant Δ; ce plus grand commun diviseur étant égal à l'unité, on arrivera nécessairement à un élément égal à ± 1. A l'aide de cet élément, par une nouvelle transformation, on remplacera le second élément de la première ligne par $+1$, et enfin,

à l'aide du second élément $+1$, on remplacera tous les éléments suivants de la première ligne par zéro. A l'aide du premier élément de la seconde ligne, qui est alors égal à -1, on remplacera de même tous les autres éléments de cette seconde ligne par zéro. De cette manière, le déterminant Δ est ramené à la forme

$$\left|\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & \ldots & d_{1,2p-2} \\ 0 & 0 & d_{21} & 0 & d_{23} & \ldots & d_{2,2p-2} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & d_{2p-2,1} & . & \ldots & \ldots & 0 \end{array}\right|.$$

Le déterminant mineur, que l'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes, est aussi un déterminant gauche égal à $+1$. Par une suite de transformations semblables aux précédentes, on le ramènera à la forme

$$\left|\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_{12} & e_{13} & \ldots & e_{1,2p-4} \\ 0 & 0 & e_{21} & 0 & e_{23} & \ldots & e_{2,2p-4} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & e_{2p-4,1} & . & \ldots & \ldots & 0 \end{array}\right|.$$

En supprimant encore les deux premières lignes et les deux premières colonnes, on obtiendra un nouveau déterminant mineur que l'on transformera de la même manière, et ainsi de suite. On arrivera enfin à l'un des deux déterminants

$$\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|.$$

Nous adopterons la première combinaison; si la seconde se présentait, il suffirait de changer les signes des deux dernières périodes.

De cette manière, le déterminant Δ est ramené à la forme *canonique*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'ensemble de toutes ces transformations simples constitue une transformation unique de la forme étudiée au n° 30. Le déterminant Δ' se rapporte aux coefficients c' relatifs à cette transformation résultante. On a donc, pour cette transformation,

$$(10) \qquad c'_{2i-1,2i} = +1, \quad c'_{2i,2i-1} = -1,$$

tous les autres coefficients c'_{ik} étant nuls, et l'expression (5) se réduit à

$$(11) \qquad \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{i=p} (\Omega_{2i-1}\,\mathcal{E}_{2i} - \mathcal{E}_{2i-1}\,\Omega_{2i}).$$

Nous appellerons *périodes normales* un système de $2p$ périodes ainsi déterminées.

Intégrales normales.

33. Nous avons vu (n° 13) que toutes les intégrales abéliennes de première espèce se ramènent à p d'entre elles, que nous avons représentées par

$$(12) \qquad v^{(i)} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\,dx,$$

Q_i étant un polynôme entier du degré $m-3$, satisfaisant aux conditions nécessaires pour que l'intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, et l'indice i variant de 1 à p. Nous désignerons par

$\Omega_h^{(i)}$ les périodes normales de l'intégrale $v^{(i)}$, l'indice h variant de 1 à 2p. La relation entre les périodes normales des deux intégrales $v^{(i)}$ et $v^{(k)}$, d'après la formule (11), est

$$(13) \qquad P = \sum_{h=1}^{h=p} [\Omega_{2h-1}^{(i)} \Omega_{2h}^{(k)} - \Omega_{2h-1}^{(k)} \Omega_{2h}^{(i)}] = 0.$$

Nous remplacerons le système des p intégrales $v^{(i)}$ par p autres intégrales $u^{(i)}$, définies par les formules

$$(14) \qquad u^{(i)} = M_{i1} v^{(1)} + M_{i2} v^{(2)} + \ldots + M_{ip} v^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} M_{ik} v^{(k)},$$

qui contiennent p^2 constantes M_{ik}, dont le déterminant est différent de zéro. Nous choisirons les p constantes M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ip}, de manière que $p-1$ périodes de l'intégrale $u^{(i)}$ soient égales à zéro et une autre égale à une quantité donnée $2\pi\sqrt{-1}$. Nous poserons

$$(15) \qquad \begin{cases} M_{i1}\Omega_1^{(1)} + M_{i2}\Omega_1^{(2)} + \ldots + M_{ip}\Omega_1^{(p)} = 0, \\ M_{i1}\Omega_3^{(1)} + M_{i2}\Omega_3^{(2)} + \ldots + M_{ip}\Omega_3^{(p)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_{i1}\Omega_{2i-1}^{(1)} + M_{i2}\Omega_{2i-1}^{(2)} + \ldots + M_{ip}\Omega_{2i-1}^{(p)} = 2\pi\sqrt{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_{i1}\Omega_{2p-1}^{(1)} + M_{i2}\Omega_{2p-1}^{(2)} + \ldots + M_{ip}\Omega_{2p-1}^{(p)} = 0, \end{cases}$$

et nous déterminerons les p constantes M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ip} à l'aide de ces p équations du premier degré à p inconnues. De cette manière, les périodes normales à indices impairs de l'intégrale $u^{(i)}$ sont nulles, excepté celle dont l'indice est $2i-1$, qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$.

Nous représenterons les périodes à indices pairs de cette même intégrale par $2\alpha_{i1}$, $2\alpha_{i2}$, ..., $2\alpha_{ip}$. D'après cela, les périodes normales de l'intégrale $u^{(i)}$ sont

$$(16) \qquad \begin{cases} \Omega_1^{(i)} = 0, & \Omega_3^{(i)} = 0, & \ldots, & \Omega_{2i-1}^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}, & \ldots, & \Omega_{2p-1}^{(i)} = 0, \\ \Omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, & \Omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, & \ldots, & \Omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, & \ldots, & \Omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip}. \end{cases}$$

On donnera le nom d'*intégrales normales* au système des p intégrales $u^{(i)}$, ainsi déterminées.

La relation (13), appliquée aux périodes normales des deux intégrales normales $u^{(i)}$ et $u^{(k)}$, se réduit à

$$(17) \qquad P = 2\pi\sqrt{-1}\,(\Omega_{2i}^{(k)} - \Omega_{2k}^{(i)}) = 4\pi\sqrt{-1}\,(\alpha_{ki} - \alpha_{ik}) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$(18) \qquad \alpha_{ki} = \alpha_{ik}.$$

Pour ces intégrales normales, les formules (1) et (8), qui donnent les valeurs des périodes primitives fournies par les deux espèces de cycles, deviennent

$$(19) \qquad \omega_k^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}\,a_{k,2i-1} + 2\sum_{h=1}^{h=p} a_{k,2h}\,\alpha_{ih},$$

$$(20) \qquad \omega_k'^{(i)} = -2\pi\sqrt{-1}\,c''_{k,2i-1} - 2\sum_{h=1}^{h=p} c''_{k,2h}\,\alpha_{ih}.$$

34. *Remarque I.* — La détermination des intégrales normales suppose que le déterminant des coefficients des équations (15), savoir

$$\delta = \begin{vmatrix} \Omega_1^{(1)} & \Omega_1^{(2)} & \dots & \Omega_1^{(p)} \\ \Omega_3^{(1)} & \Omega_3^{(2)} & \dots & \Omega_3^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{2p-1}^{(1)} & \Omega_{2p-1}^{(2)} & \dots & \Omega_{2p-1}^{(p)} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. C'est ce qui a lieu en effet; car, si ce déterminant était nul, on pourrait attribuer aux p constantes M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ip} des valeurs telles que les premiers membres des équations (15) fussent tous égaux à zéro, et l'on aurait une intégrale u dont les p périodes normales à indices impairs seraient nulles.

Pour reconnaître que ceci est impossible, nous nous servirons d'une propriété des fonctions holomorphes, qui est une conséquence d'une formule de transformation des intégrales multiples due à Green (Note A) : si $f(x) = X + Y\sqrt{-1}$ est une fonction holomorphe d'une variable imaginaire x dans une portion du plan à contour simple,

l'intégrale

$$(21) \qquad \int X\,dY,$$

relative à ce contour décrit dans le sens positif, a une valeur positive et différente de zéro. Considérons le contour simple défini au n° **25**; l'intégrale $u = X + Y\sqrt{-1}$ a m valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, qui sont des fonctions holomorphes de x dans la partie du plan enveloppée par ce contour; l'intégrale (21) relative à chacune d'elles ayant une valeur positive, leur somme

$$(22) \qquad \sum_{h=0}^{h=m-1} \int X_h\,dY_h$$

a aussi une valeur positive. On peut évaluer cette somme comme la somme (2) du n° **26**; car les propriétés dont nous avons fait usage dans la démonstration appartiennent aux fonctions X et Y; sa valeur est donnée par la formule (11) du n° **32**, en supposant que Ω désigne les périodes normales de X et $\mathfrak{C}$ celles de Y; si toutes les périodes à indices impairs de u, et, par conséquent, de X et Y, étaient nulles, cette quantité serait égale à zéro, ce qui est impossible.

Le déterminant δ étant différent de zéro, si l'on représente par δ_{ik} le déterminant mineur que l'on obtient en supprimant dans le déterminant δ la ligne de rang i et la colonne de rang k, on déduit des équations (15)

$$(23) \qquad M_{ik} = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{(-1)^{i+k}\,\delta_{ik}}{\delta}.$$

Il est facile de reconnaître que le déterminant des quantités M_{ik}, savoir

$$D = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1p} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{p1} & M_{p2} & \ldots & M_{pp} \end{vmatrix}$$

est aussi différent de zéro. Car, en vertu des équations (15), le produit de ce déterminant par le déterminant δ est égal à un déterminant

dont les éléments situés sur la diagonale sont égaux à $2\pi\sqrt{-1}$ et tous les autres nuls; on a donc

$$D\delta = (2\pi\sqrt{-1})^p.$$

Il en résulte que, réciproquement, les intégrales v sont égales à des fonctions linéaires et homogènes des intégrales u.

35. *Remarque II.* — Les périodes normales des p intégrales normales dépendent des $\frac{p(p+1)}{2}$ quantités α_{ik}. Posons

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + \alpha''_{ik}\sqrt{-1},$$

et appliquons à la fonction

$$u = m_1 u^{(1)} + m_2 u^{(2)} + \ldots + m_p u^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} m_k u^{(k)} = X + Y\sqrt{-1},$$

dans laquelle $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont des constantes réelles quelconques, le théorème dont nous nous sommes servi dans le numéro précédent. La valeur de la somme (22) est toujours donnée par la formule (11) du n° 32, en supposant que Ω désigne les périodes de X et $\mathcal{E}$ celles de Y. On a ici

$$\Omega_{2i-1} = 0, \quad \mathcal{E}_{2i-1} = 2\pi m_i, \quad \Omega_{2i} = 2\sum_{k=1}^{k=p} m_k \alpha'_{ki}, \quad \mathcal{E}_{2i} = 2\sum_{k=1}^{k=p} m_k \alpha''_{ki},$$

et par suite

$$P = -4\pi\sum_{i=1}^{i=p}\left[m_i\sum_{k=1}^{k=p} m_k \alpha'_{ki}\right].$$

Cette quantité ayant une valeur positive, on en conclut que les parties réelles des constantes α_{ik} satisfont à l'inégalité

$$(24) \qquad \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha'_{ik} < 0,$$

dans laquelle $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont des quantités réelles quelconques.

36. *Remarque III.* — Nous avons vu (n° **21**) que les périodes des p intégrales abéliennes $v^{(i)}$ de première espèce se ramènent à p systèmes de 2p périodes correspondantes $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots, \omega_{2p}^{(i)}$; les périodes correspondantes des diverses intégrales sont celles qui sont fournies par un même cycle. Il est impossible de réduire l'ensemble de ces systèmes à un moindre nombre de périodes. Il faudrait pour cela que les 2p périodes de toutes les intégrales satisfissent à une même relation linéaire

$$m_1 \omega_1^{(i)} + m_2 \omega_2^{(i)} + \ldots + m_{2p} \omega_{2p}^{(i)} = 0,$$

à coefficients réels. Une relation de ce genre entre les périodes normales des intégrales normales $u^{(i)}$ serait de la forme

$$2 n_i \pi \sqrt{-1} + 2 \sum_{k=1}^{k=p} m_k \alpha_{ik} = 0,$$

à coefficients réels n_i et m_k. En égalant à zéro la partie réelle, on aurait

$$\sum_{k=1}^{k=p} m_k \alpha'_{ik} = 0,$$

et en ajoutant les sommes relatives aux diverses valeurs de i, après avoir multiplié chacune d'elles par m_i,

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha'_{ik} = 0;$$

or nous avons démontré que cette dernière somme a une valeur négative et différente de zéro.

CHAPITRE VI.

Application aux intégrales ultra-elliptiques.

37. On donne ce nom aux intégrales abéliennes que l'on obtient quand l'équation algébrique qui lie x et y est de la forme

$$y^2 = G(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p+2}). \tag{1}$$

Chacun des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+2}$ est un point critique autour duquel se permutent les deux racines de l'équation. On démontre aisément qu'il existe p intégrales de première espèce, c'est-à-dire qui conservent une valeur finie sur toute la sphère (¹); elles sont représentées par la formule

$$v^{(i)} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x^{i-1}}{y}\, dx, \tag{2}$$

dans laquelle le nombre entier i varie de 1 à p.

Appelons $\mathcal{A}_i$ l'intégrale relative au lacet (a_i) décrit avec la racine initiale y_0. Prenons le lacet (a_{2p+1}) pour lacet fondamental de première espèce et le lacet (a'_{2p+2}) pour lacet fondamental de seconde espèce. Supposons que sur chaque lacet on désigne par y_{g_1} la racine y_0, et par y_{g_2} ou y_{g_0} la racine $-y_0$. Les cycles simples formés par chacun des 2p premiers lacets $(a_i)_{g_1}^{g_0}$ suivis du lacet fondamental $(a_{2p+1})_{g_1}^{g_0}$ donnent les 2p périodes

$$\omega_i = \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_{2p+1}, \tag{3}$$

l'indice i variant de 1 à 2p. Nous affecterons les points critiques d'in-

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 673.

dices croissants, suivant l'ordre dans lequel ils sont rencontrés par un rayon vecteur tournant autour de l'origine dans le sens positif, et nous ferons passer le rayon Ol du circuit entre les points a_1 et a_{2p+2}.

L'intégrale suivant le circuit étant nulle, on a la relation

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \ldots + \mathcal{A}_{2p+1} - \mathcal{A}_{2p+2} = 0,$$

d'où

$$\mathcal{A}_{2p+2} - \mathcal{A}_{2p+1} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \ldots - \omega_{2p},$$

et la dernière période se ramène aux 2p premières. Ceci montre que le nombre des périodes distinctes est bien égal à 2p, et par conséquent double du nombre des intégrales ultra-elliptiques de première espèce.

38. L'intégrale relative au lacet fondamental de seconde espèce (a'_{2p+2}), décrit avec la valeur initiale y_0, est égale à

$$\mathcal{A}_{2p+1} - \mathcal{A}_{2p} + \mathcal{A}_{2p-1} - \ldots - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{2p+2}.$$

Pour un lacet (a_{2i-1}) à indice impair, on a $y_{\alpha_1} = y_0$, et par suite

$$a_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0} = \mathcal{A}_{2p+2} - \mathcal{A}_{2p+1} + \ldots + \mathcal{A}_{2i} - \mathcal{A}_{2i-2} + \ldots - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1,$$

$$\omega'_{2i-1} = a_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0} - \mathcal{A}_{2p+2} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \ldots - \mathcal{A}_{2i-2} + \mathcal{A}_{2i} - \ldots + \mathcal{A}_{2p} - \mathcal{A}_{2p+1},$$

$$(4) \quad \omega'_{2i-1} = \omega_1 - \omega_2 + \ldots - \omega_{2i-2} + \omega_{2i} - \omega_{2i+1} + \ldots + \omega_{2p}.$$

Pour un lacet (a_{2i}) à indice pair, on a $y_{\alpha_1} = -y_0$, et par suite

$$a_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0} = -\mathcal{A}_{2p+2} + \mathcal{A}_{2p+1} - \ldots + \mathcal{A}_{2i+1} - \mathcal{A}_{2i-1} + \ldots + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1,$$

$$\omega'_{2i} = \mathcal{A}_{2p+2} + a_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0} = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \ldots - \mathcal{A}_{2i-1} + \mathcal{A}_{2i+1} - \ldots - \mathcal{A}_{2p} + \mathcal{A}_{2p+1},$$

$$(5) \quad \omega'_{2i} = -\omega_1 + \omega_2 - \ldots - \omega_{2i-1} + \omega_{2i+1} - \omega_{2i+2} + \ldots - \omega_{2p}.$$

On fera varier i de 1 à p.

Puisque $p = 2$, chaque point critique n'introduit qu'un seul terme $B_{g_1}^{g_2} A_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ ou $B_{g_1}^{g_0} A_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0}$ dans l'expression (8) du n° 27. Les termes qui se rapportent aux deux derniers lacets, choisis comme lacets fondamentaux de première et de seconde espèce, sont nuls; il reste 2p termes dans

l'expression qui prend la forme (9) du n° **28**, et par suite la forme (10). D'après les formules (4) et (5), le déterminant des coefficients c_{ik} est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

39. La transformation $r = 1$, $s = 2$, $n = 1$ (n° **31**) donne les périodes $\omega_1 - \omega_2, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{2p}$ et remplace la seconde ligne du déterminant par

$$-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0,$$

et la seconde colonne par ces mêmes éléments changés de signe.

Une seconde transformation $r = 2$, $s = 3$, $n = 1$ donne les périodes $\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_{2p}$ et remplace la troisième ligne par

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad \dots \quad 1,$$

et la troisième colonne par ces mêmes éléments changés de signe.

Enfin la troisième transformation $r = 3$, $s = 1$, $n = -1$ conduit aux périodes

$$\omega_1 - \omega_2, \quad \omega_2 - \omega_3, \quad \omega_1 - \omega_2 + \omega_3, \quad \omega_4, \quad \omega_5, \quad \dots, \quad \omega_{2p},$$

et remplace la première ligne par

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0,$$

et la première colonne par les mêmes éléments changés de signe. De cette manière, le déterminant est réduit à la forme

$$\left|\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{array}\right|.$$

Une seconde transformation complexe de même sorte, effectuée sur le déterminant mineur qui résulte de la suppression des deux premières lignes et des deux premières colonnes, n'altère pas les deux premières périodes et remplace les suivantes par

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4,\quad \omega_4 - \omega_5,\quad \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \omega_5,\quad \omega_6,\quad \omega_7,\quad \ldots,\quad \omega_{2p}.$$

En continuant de cette manière, on arrive aux deux périodes

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \ldots + \omega_{2p-1},\quad \omega_{2p},$$

et au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En effectuant la transformation $r = 1$, $s = 2$, $n = 1$, on remplace ces deux dernières périodes par

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \ldots + \omega_{2p-1} - \omega_{2p},\quad \omega_{2p},$$

ce qui ne change pas le déterminant.

On obtient ainsi le système des périodes normales

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_1 & = \omega_1 - \omega_2, & \Omega_2 & = \omega_2 - \omega_3, \\ \Omega_3 & = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4, & \Omega_4 & = \omega_4 - \omega_5, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \Omega_{2p-2} & = \omega_{2p-2} - \omega_{2p-1}, \\ \Omega_{2p-1} & = \omega_1 - \omega_2 + \ldots - \omega_{2p}, & \Omega_{2p} & = \omega_{2p}. \end{array}\right.$$

Elles ont pour expressions, en fonction des intégrales relatives aux lacets,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_1 & = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2, & \Omega_2 & = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3, \\ \Omega_3 & = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4, & \Omega_4 & = \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_5, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{2p-1} & = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \ldots - \mathcal{A}_{2p}, & \Omega_{2p} & = \mathcal{A}_{2p} - \mathcal{A}_{2p+1}. \end{array}\right.$$

Des formules (4), (5), (6) on déduit

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_{2i-1} &= \quad \Omega_{2i-3} + \sum_{k=i}^{k=p} \Omega_{2k}, \\ \omega'_{2i} &= -\Omega_{2i-1} - \sum_{k=i}^{k=p} \Omega_{2k}. \end{aligned}\right.$$

Le premier groupe des formules (6) donne les différences

$$\Omega_{2i-1} - \Omega_{2i-3} = \omega_{2i-1} - \omega_{2i};$$

en combinant ces relations avec le second groupe des formules (6) et remontant de proche en proche, on obtient les formules

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{2i-1} &= -\Omega_{2i-3} + \Omega_{2p-1} + \sum_{k=i}^{k=p} \Omega_{2k}, \\ \omega_{2i} &= -\Omega_{2i-1} + \Omega_{2p-1} + \sum_{k=i}^{k=p} \Omega_{2k}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on suppose que $\Omega_{2i-3} = 0$ pour $i = 1$.

40. En substituant ces valeurs dans l'expression (9) du n° **28**, savoir

$$P = -\sum_{i=1}^{i=p} (\varepsilon_{2i-1}\,\omega'_{2i-1} + \varepsilon_{2i}\,\omega'_{2i}),$$

on vérifie qu'elle prend bien la forme (11) du n° **32**. On a, en effet,

$$\begin{aligned} P = &\sum_{i=1}^{i=p} \left[(\Omega_{2i-1} - \Omega_{2i-3})\,\mathcal{E}_{2p-1} - (\mathcal{E}_{2i-1}\,\Omega_{2i-1} - \mathcal{E}_{2i-3}\,\Omega_{2i-3}) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{i=p} \left[(\Omega_{2i-1} - \Omega_{2i-3}) \sum_{k=i}^{k=p} \mathcal{E}_{2k} - (\mathcal{E}_{2i-1} - \mathcal{E}_{2i-3}) \sum_{k=i}^{k=p} \Omega_{2k} \right]. \end{aligned}$$

La première partie est nulle. La seconde partie étant alternée par rap-

port aux périodes Ω et $\mathcal{E}$, il suffit de calculer son premier terme

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=p}\left[\Omega_{2i-1}\sum_{k=i}^{k=p}\mathcal{E}_{2k}\right]-\sum_{i=2}^{i=p}\left[\Omega_{2i-3}\sum_{k=i}^{k=p}\mathcal{E}_{2k}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{i=p}\left[\Omega_{2i-1}\sum_{k=i}^{k=p}\mathcal{E}_{2k}\right]-\sum_{i=1}^{i=p-1}\left[\Omega_{2i-1}\sum_{k=i+1}^{k=p}\mathcal{E}_{2k}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{i=p-1}\Omega_{2i-1}\mathcal{E}_{2i}+\Omega_{2p-1}\mathcal{E}_{2p}=\sum_{i=1}^{i=p}\Omega_{2i-1}\mathcal{E}_{2i}.
\end{aligned}$$

On arrive ainsi à l'expression

$$\mathrm{P}=\sum_{i=1}^{i=p}(\Omega_{2i-1}\mathcal{E}_{2i}-\mathcal{E}_{2i-1}\Omega_{2i}).$$

CHAPITRE VII.

THÉORÈME D'ABEL.

Étude de la fonction $\log\dfrac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$.

41. Soient $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ deux polynômes entiers en x et y, du degré n. En général, chacune des courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ coupe la courbe proposée $F(x,y) = 0$, du degré m, en mn points distincts et différents des points critiques. Nous désignerons par (ξ_k, η_k) les premiers points d'intersection et par (ξ'_k, η'_k) les seconds, l'indice k variant de 1 à mn. Si les coefficients du polynôme φ varient d'une manière continue jusqu'à devenir égaux à ceux du polynôme ψ, les points d'intersection (ξ_k, η_k) décrivent des lignes continues et viennent coïncider respectivement avec les points (ξ'_k, η'_k). Nous supposerons l'étendue de cette variation assez restreinte, pour que les lignes $\xi_k\xi'_k$ décrites par les points d'intersection ne rencontrent pas les lacets relatifs aux points critiques et ne se rencontrent pas entre elles.

La fonction

$$v = \log\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}, \tag{1}$$

outre les points critiques algébriques, autour desquels elle acquiert, en même temps que la racine y, un certain nombre de valeurs qui se permutent circulairement, admet les points critiques logarithmiques (ξ_k, η_k) et (ξ'_k, η'_k), autour de chacun desquels elle acquiert une infinité de valeurs en progression arithmétique, dont la raison est $2\pi\sqrt{-1}$. A l'aide de la ligne $\xi_k\xi'_k$, de deux petits cercles décrits des points ξ_k et ξ'_k comme centres, et d'une ligne Ob allant du point O à un point de la ligne $\xi_k\xi'_k$, par exemple à un point voisin du point ξ_k, formons

bc, $b'c'$ de la coupure $\xi_k\xi'_k$; si l'on appelle v et v' les valeurs de cette fonction aux points m et m', on a

$$v' - v = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Ce lacet $\xi_k\xi'_k$ est neutre pour les autres fonctions v.

42. La fonction v peut être regardée comme une intégrale définie, analogue à une intégrale abélienne. Si l'on désigne par α la valeur initiale du logarithme, on a, en effet,

$$(2) \qquad v - \alpha = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{d\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)}{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)}.$$

Considérons un cycle quelconque situé dans la partie du plan enveloppé par le contour, et par conséquent ne coupant aucune des lignes $\xi_k\xi'_k$. Nous allons faire voir que l'intégrale relative à ce cycle est nulle. Nous avons fait varier d'une manière continue le polynôme du degré n, de φ à ψ; prenons un certain nombre de polynômes intermédiaires φ_1, φ_2, ..., φ_μ, peu différents les uns des autres; les zéros de ces polynômes, ou les points d'intersection des courbes $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., avec la courbe $F = 0$, sont situés sur les lignes $\xi_k\xi'_k$, à l'intérieur des lacets. Posons

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\varphi + (\varphi_1 - \varphi)}{\varphi} = 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi} = 1 + \varepsilon f(x, y),$$

ε étant un nombre positif très-petit; on peut prendre le polynôme φ_1 assez peu différent de φ, pour que le module de la fonction $f(x, y)$ soit inférieur à l'unité tout le long du cycle. La variation de la fonction $\log\frac{\varphi_1}{\varphi}$, ou $\log(1 + \varepsilon f)$, est égale à l'intégrale définie

$$\varepsilon \int \frac{df}{1 + \varepsilon f}.$$

Quand le point (x, y) décrit le cycle, le point f décrit une ligne d'une

longueur finie l, et le module de l'intégrale est moindre que la quantité très-petite $\frac{\varepsilon l}{1-\varepsilon}$; mais la variation du logarithme ne peut être qu'une quantité de la forme $2m'\pi\sqrt{-1}$, m' étant un nombre entier, positif ou négatif; on en conclut que cette variation est rigoureusement nulle.

Pour la même raison, les variations des fonctions

$$\log\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\quad \log\frac{\varphi_3}{\varphi_2},\quad \ldots,\quad \log\frac{\psi}{\varphi_\mu},$$

sur le cycle, sont rigoureusement nulles. La variation de la fonction $\log\frac{\psi}{\varphi}$, qui est la somme des précédentes, est aussi égale à zéro. Ainsi, toutes les périodes de la fonction v sont nulles, excepté la période $2\pi\sqrt{-1}$, qu'elle acquiert quand la variable tourne autour de l'un des points critiques logarithmiques ξ_k ou ξ'_k.

Théorème d'Abel.

43. Désignons par u une intégrale abélienne de première espèce

(3) $$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q(x, y)}{F'_y(x, y)}\,dx.$$

L'introduction des lacets $(\xi_k \xi'_k)$ ne modifie pas les fonctions u_h, telles que nous les avons définies au nº 25. Les m fonctions $v_h \frac{du_h}{dx}$ étant holomorphes dans la partie du plan enveloppé par le contour, chacune des intégrales

$$\int v_h \frac{du_h}{dx}\,dx, \quad \text{ou} \quad \int v_h\,du_h,$$

prise sur le contour entier, est égale à zéro, et, par conséquent, leur somme

(4) $$\sum_{h=0}^{h=m-1} \int v_h\,du_h$$

est aussi égale à zéro.

La partie de chacune des intégrales relatives au circuit formé par la droite Ol et la grande circonférence étant nulle, il suffit de considérer les lacets. Le lacet $(\xi_k \xi'_k)$ n'entre que dans une intégrale, celle où y acquiert au point ξ_k la valeur η_k; les deux bords de la coupure Ob donnent dans l'intégrale des quantités égales et de signes contraires, puisque la valeur de v est la même sur les deux bords; les petits cercles ayant pour centres ξ_k et ξ'_k donnent des quantités infiniment petites; les deux bords bc, $c'b'$ de la coupure $\xi_k \xi'_k$ donnent la quantité

$$\int_{\xi_k}^{\xi'_k} v\,du + \int_{\xi'_k}^{\xi_k} v'\,du = \int_{\xi_k}^{\xi'_k} (v - v')\,du = 2\pi\sqrt{-1}\int_{\xi_k}^{\xi'_k} du$$
$$= 2\pi\sqrt{-1}\,[u(\xi'_k, \eta'_k) - u(\xi_k, \eta_k)],$$

la quantité placée entre parenthèses désignant la variation qu'éprouve la fonction u, quand la variable (x, y) va du point (ξ_k, η_k) au point (ξ'_k, η'_k), en suivant la ligne $\xi_k \xi'_k$. Les mn lacets $(\xi_k \xi'_k)$ introduisent ainsi dans les intégrales la quantité

$$(5) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{k=mn} [u(\xi'_k, \eta'_k) - u(\xi_k, \eta_k)].$$

44. Considérons maintenant les lacets relatifs aux points critiques. Le lacet (a) entre dans p intégrales. Si l'on désigne par u et u' les

Fig. 9.



valeurs de la fonction u en m et m', sur les deux bords opposés de la coupure Oa (*fig.* 9), et par v et v' les valeurs de la fonction v en ces

mêmes points, la partie relative au lacet (a) dans les p intégrales est

$$\sum_{r=1}^{r=p}\int_0^a v'_{\alpha_r}\,du'_{\alpha_r}+\sum_{r=1}^{r=p}\int_a^0 v_{\alpha_r}\,du_{\alpha_r}=\sum_{r=1}^{r=p}\int_0^a v'_{\alpha_r}\,du'_{\alpha_r}-\sum_{r=1}^{r=p}\int_0^a v_{\alpha_{r+1}}\,du_{\alpha_{r+1}}.$$

Nous avons vu (n° **25**) que la différence $u'_{\alpha_r}-u_{\alpha_{r+1}}$ est égale à la période $A_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$ de l'intégrale (3) relative à un certain cycle. Pour la même raison, la différence $v'_{\alpha_r}-v_{\alpha_{r+1}}$ est égale à la période de l'intégrale (2) relative au même cycle; mais nous avons démontré que les périodes de cette intégrale, relatives à tous les cycles situés dans la partie du plan enveloppé par le contour, sont nulles; on a donc

$$v'_{\alpha_r}-v_{\alpha_{r+1}}=0,$$

et l'expression précédente devient

$$\sum_{r=1}^{r=p}\int_0^a v_{\alpha_{r+1}}\,du_{\alpha_{r+1}}-\sum_{r=1}^{r=p}\int_0^a v_{\alpha_{r+1}}\,du_{\alpha_{r+1}}.$$

Ainsi, la partie relative à chaque lacet (a) est nulle.

D'après cela, la somme des m intégrales (4) se compose uniquement de la quantité (5) fournie par les lacets $(\xi_k\xi'_k)$, et l'on a l'équation

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{k=mn}[u(\xi'_k,\eta'_k)-u(\xi_k,\eta_k)]=0.$$

On en conclut que *la somme des variations d'une intégrale abélienne de première espèce sur les lignes décrites par les points d'intersection de la courbe proposée* $F(x,y)=0$ *et d'une courbe algébrique variable est nulle.*

De l'équation (6) on déduit

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{k=mn}u(\xi'_k,\eta'_k)=\sum_{k=1}^{k=mn}u(\xi_k,\eta_k),$$

et l'on peut énoncer le théorème d'Abel en disant que *la somme des*

valeurs continues d'une intégrale abélienne de première espèce aux points d'intersection de la courbe $F = 0$ *et d'une courbe algébrique variable conserve une valeur constante.*

Ce théorème est indépendant des restrictions apportées à la variation de la courbe mobile. Supposons que, dans la position $\psi = 0$ de la courbe mobile, l'un des points d'intersection rencontre en m le bord de la coupure Oa, et que, pour une position infiniment voisine de la courbe, il vienne en m' sur le bord opposé; si le terme correspondant à ce point est $u_{\alpha_{r+1}}(\xi', \eta')$ dans la première position, il sera $u'_{\alpha_r}(\xi', \eta')$ dans la seconde position, et la somme éprouvera un accroissement brusque égal à la période $A'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$. A partir de là, la somme restera de nouveau constante, jusqu'à ce que l'un des points rencontre l'une des coupures, et ainsi de suite. Mais, si l'on supprime les coupures, de manière que l'on puisse aller directement de m en m', la variation de l'intégrale $u(\xi', \eta')$ étant alors infiniment petite, la somme n'éprouvera aucune variation.

Nous avons supposé que les lignes $\xi_k \xi'_k$, décrites par les points d'intersection, ne se rencontrent pas. Concevons, en général, l'intervalle divisé en plusieurs parties, dans chacune desquelles toutes les conditions soient remplies; la somme étant constante dans chaque intervalle partiel, et les intégrales $u(\xi_k, \eta_k)$ variant d'une manière continue, il est clair que la somme reste constante dans toute l'étendue.

Pour évaluer cette somme, on calculera les valeurs de l'intégrale abélienne $u(x, y)$ suivant des lignes allant de l'origine (x_0, y_0) aux différents points d'intersection de la courbe $F = 0$ et d'une courbe particulière du degré n, que l'on regardera comme la position initiale de la courbe mobile. Mais on observe que, si l'on change ces lignes d'intégration, une ou plusieurs intégrales peuvent être augmentées de multiples des périodes; la somme n'est donc pas absolument déterminée; elle admet, pour les courbes du degré n, une infinité de valeurs égales à l'une d'elles augmentée de multiples des périodes. Les valeurs initiales des intégrales étant évaluées suivant certains chemins, si l'on fait varier ensuite la courbe du degré n, et si l'on considère les variations des intégrales sur les lignes décrites par les points d'intersection, la somme conserve une valeur constante.

On sait que, lorsqu'on fait passer une courbe $\varphi = 0$ du degré n par

un certain nombre de points pris à volonté sur la courbe $F = 0$ du degré m, les autres points d'intersection en résultent. Quand n est plus petit que m, le nombre des points arbitraires est $\frac{n(n+3)}{2}$; ils suffisent pour déterminer la courbe $\varphi = 0$. Mais, si n est égal ou supérieur à m, ce nombre est égal à $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$; il est moindre que le nombre des points nécessaires pour déterminer la courbe. Le nombre des arbitraires que renferme la somme est égal au nombre des points d'intersection que l'on peut prendre à volonté; on peut regarder cette somme comme une fonction de ces points arbitraires; le théorème d'Abel consiste en ce que la valeur de la somme est indépendante de ces arbitraires.

45. Lorsque la courbe variable est assujettie à passer par un ou plusieurs points fixes situés sur la courbe $F = 0$, les termes correspondants ayant des valeurs constantes, on peut en faire abstraction. Considérons, par exemple, la courbe représentée par l'équation $Q = 0$, dans laquelle Q est un polynôme du degré $m - 3$, satisfaisant aux A conditions nécessaires pour que l'intégrale abélienne formée avec ce polynôme reste finie sur toute la sphère. La courbe $Q = 0$ passe par les points multiples de la courbe $F = 0$, et nous avons vu (n° **14**) que ces points multiples doivent compter pour $2A$ points communs aux deux courbes; il reste $2(p - 1)$ points d'intersection mobiles, dont $p - 1$ peuvent être pris à volonté. La somme des valeurs d'une intégrale abélienne de première espèce en ces $2(p - 1)$ points d'intersection est constante.

46. Il résulte aussi du théorème d'Abel que la somme des valeurs d'une intégrale abélienne aux m points d'intersection de la courbe $F = 0$ et d'une droite mobile $ax + by + c = 0$ est constante. Si l'équation de la droite est de la forme $x - \xi = 0$, ξ étant un paramètre arbitraire, les m points d'intersection sont (ξ, η_1), (ξ, η_2), ..., (ξ, η_m), et l'on a

$$\sum_{k=1}^{k=m} u(\xi', \eta'_k) = \sum_{k=1}^{k=m} u(\xi, \eta_k). \tag{8}$$

Il est facile de démontrer directement le théorème dans ce cas particulier. Désignons, en effet, par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les racines de l'équation $F(x, y) = 0$. La somme des variations de l'intégrale abélienne sur les lignes décrites par les points d'intersection, quand le paramètre varie de ξ à ξ', est égale à l'intégrale

$$(9) \qquad \int_{\xi}^{\xi'} \left[\frac{Q(x, y_1)}{F'_y(x, y_1)} + \frac{Q(x, y_2)}{F'_y(x, y_2)} + \cdots + \frac{Q(x, y_m)}{F'_y(x, y_m)}\right] dx.$$

La quantité placée entre parenthèses est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation $F(x, y) = 0$; c'est donc une fonction rationnelle de x et des coefficients de l'équation ordonnée par rapport aux puissances de y, et, par conséquent, c'est une fonction rationnelle de x. L'intégrale (9) conservant une valeur finie sur toute la sphère, cette fonction rationnelle est identiquement nulle. On en conclut que l'intégrale (9) elle-même est nulle.

SECONDE PARTIE.

FONCTIONS ABÉLIENNES.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Existence des fonctions intégrales de deux équations différentielles à deux variables indépendantes.

47. La méthode dont nous nous sommes servis, M. Bouquet et moi, pour démontrer l'existence des fonctions définies par un système d'équations différentielles à une seule variable indépendante ([1]), a été étendue par M. Bouquet à un système d'équations aux différentielles totales ([2]).

Considérons d'abord l'équation

$$du = X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

dans laquelle X et Y sont des fonctions analytiques de x, y, u, satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$D_y X + Y D_u X = D_x Y + X D_u Y. \tag{2}$$

Les deux variables indépendantes x et y partent des points x_0 et y_0,

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 325.

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265.

la fonction u ayant une valeur initiale u_0. Nous supposons que les deux coefficients différentiels X et Y restent holomorphes pour toutes les valeurs de x et y situées dans des cercles décrits des points x_0 et y_0 comme centres avec le rayon ρ, et pour les valeurs de u situées dans le cercle décrit du point u_0 comme centre avec le rayon r. Appelons M le maximum des modules des fonctions X et Y dans cette étendue, et, pour abréger, représentons les deux variables par x_0+x, y_0+y et la fonction par u_0+u; les deux variables partiront alors des points $x=0$, $y=0$, la fonction ayant la valeur initiale $u=0$. Si l'équation (1) est satisfaite par une fonction u de x et y, holomorphe dans le voisinage des points $x=0$, $y=0$, on obtiendra ses dérivées partielles successives au moyen des équations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{X},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{Y},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathrm{D}_x\mathrm{X}+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{D}_u\mathrm{X},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\mathrm{D}_y\mathrm{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}_u\mathrm{X},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\mathrm{D}_x\mathrm{Y}+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{D}_u\mathrm{Y},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{D}_y\mathrm{Y}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}_u\mathrm{Y},\\
&\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\mathrm{D}_x^2\mathrm{X}+2\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{D}_{xu}^2\mathrm{X}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{D}_u^2\mathrm{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{D}_u\mathrm{X},\\
&\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\mathrm{D}_{xy}^2\mathrm{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}_{xu}^2\mathrm{X}+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{D}_{yu}^2\mathrm{X}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}_u^2\mathrm{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\mathrm{D}_u\mathrm{X},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

et nous remarquons, en vertu de la relation (2), que les dérivées partielles de la fonction u sont indépendantes de l'ordre des opérations.

Imaginons que, dans les seconds membres, on remplace les valeurs des fonctions X et Y et de leurs dérivées partielles pour $x=0$, $y=0$, $u=0$, par leurs modules; les deux premières donneront les modules de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ et de $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$; en portant ces valeurs dans les trois suivantes, on aura des limites supérieures des modules de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0$,

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0$. En portant ces valeurs dans les suivantes, on aura des limites supérieures des modules de $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right)_0$, ..., et ainsi de suite.

Les dérivées partielles des fonctions X et Y ont, pour $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, des modules moindres que les dérivées correspondantes de la fonction

$$\varphi(x, y, u) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)},$$

pour ces mêmes valeurs des variables. Car on a ([1])

$$\text{mod.}(D_{xyu}^{n+n'+n''} X)_0 < 1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2\ldots n'' \frac{M}{\rho^n \rho^{n'} r^{n''}},$$

$$(D_{xyu}^{n+n'+n''} \varphi)_0 = (D_{(x+y)u}^{(n+n')+n''} \varphi)_0 = 1.2\ldots(n+n').1.2\ldots n'' \frac{M}{\rho^{n+n'} r^{n''}}$$

$$= 1.2\ldots n.(n+1)\ldots(n+n').1.2\ldots n'' \frac{M}{\rho^{n+n'} r^{n''}},$$

et par suite

$$\text{mod.}(D_{xyu}^{n+n'+n''} X)_0 < (D_{xyu}^{n+n'+n''} \varphi)_0.$$

On a de même

$$\text{mod.}(D_{xyu}^{n+n'+n''} Y)_0 < (D_{xyu}^{n+n'+n''} \varphi)_0.$$

48. Considérons l'équation différentielle

$$(4) \qquad dv = \varphi(x, y, v)\, dx + \varphi(x, y, v)\, dy,$$

qui satisfait à la condition (2), et dans laquelle nous donnons à la fonction v la valeur initiale $v = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$. Si cette nouvelle équation admet une intégrale holomorphe, on obtiendra ses dérivées

---

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 326.

partielles successives au moyen des équations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial v}{\partial x} = \varphi, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \varphi,\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = D_x \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial x} D_v \varphi,\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = D_y \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial y} D_v \varphi, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = D_x \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial x} D_v \varphi,\\[2mm]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = D_y \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial y} D_v \varphi,\\[2mm]
\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = D_x^2 \varphi + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} D_{xv}^2 \varphi + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 D_v^2 \varphi + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} D_v \varphi,\\[2mm]
\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y} = D_{xy}^2 \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial y} D_{xv}^2 \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial x} D_{yv}^2 \varphi + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} D_v^2 \varphi + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} D_v \varphi,\\[2mm]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}\right.$$

analogues aux équations (3). Quand on y fait $x=0$, $y=0$, $v=0$, la fonction φ et ses dérivées partielles prenant toutes des valeurs positives, les seconds membres sont des sommes de termes positifs, et l'on en déduit successivement pour $\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0$, $\cdots$ des valeurs positives.

En comparant les équations (3) et (5), on voit que les modules des quantités $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0$, $\dots$, déduites des équations (3), sont respectivement moindres que les quantités positives $\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0$, $\dots$, déduites des équations (5).

La fonction v existe. Car l'équation (4) se ramène à une équation différentielle ordinaire

$$\left(1-\frac{v}{r}\right) dv = \frac{M}{1-\dfrac{x+y}{\rho}}\, d(x+y),$$

et par suite à l'équation finie

$$v - \frac{v^2}{2r} = -M\rho \log\left(1-\frac{x+y}{\rho}\right),$$

dont les coefficients sont les quantités que nous avons calculées de proche en proche à l'aide des équations (3). Nous avons vu que les modules de ces coefficients sont moindres que les coefficients correspondants de la série (7); ainsi la série (8) est aussi convergente pour toutes les valeurs de x et de y dont les modules sont inférieurs à ρ'; elle définit une fonction holomorphe des deux variables x et y dans cette étendue, et le module de cette fonction est moindre que r.

Il reste à faire voir que la fonction ainsi définie satisfait bien à l'équation différentielle proposée (1), ou aux deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{X}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{Y}. \tag{9}$$

Si l'on y remplace u par sa valeur (8), les premiers membres deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 \frac{x}{1}\frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} + \cdots, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 \frac{x}{1}\frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Les seconds membres X et Y, qui sont des fonctions de x, y, u, deviennent des fonctions des deux variables x et y, holomorphes pour toutes les valeurs de ces variables dont les modules sont moindres que ρ', et ces fonctions se développent en séries convergentes dans cette étendue,

$$\left\{\begin{aligned} \text{X} &= \text{X}_0 + \left(\frac{\partial \text{X}}{\partial x}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{\partial \text{X}}{\partial y}\right)_0 \frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^2 \text{X}}{\partial x^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \text{X}}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \frac{x}{1}\frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^2 \text{X}}{\partial y^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} + \cdots, \\ \text{Y} &= \text{Y}_0 + \left(\frac{\partial \text{Y}}{\partial x}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{\partial \text{Y}}{\partial y}\right)_0 \frac{y}{1} + \left(\frac{\partial^2 \text{Y}}{\partial x^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

et l'on calculera les coefficients de ces séries à l'aide des équations

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial x} = D_x X + \frac{\partial u}{\partial x} D_u X,\\
&\frac{\partial X}{\partial y} = D_y X + \frac{\partial u}{\partial y} D_u X, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = D_x Y + \frac{\partial u}{\partial x} D_u Y,\\
&\frac{\partial Y}{\partial y} = D_y Y + \frac{\partial u}{\partial y} D_u Y,\\
&\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = D_x^2 X + 2\frac{\partial u}{\partial x} D_{xu}^2 X + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 D_u^2 X + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} D_u X,\\
&\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} = D_{xy}^2 X + \frac{\partial u}{\partial y} D_{xu}^2 X + \frac{\partial u}{\partial x} D_{yu}^2 X + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} D_u^2 X + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} D_u X,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots$ désignent les dérivées partielles de la fonction u définie par la série (8). Pour $x = 0$, $y = 0$, ces dérivées partielles se réduisent aux coefficients mêmes de la série, c'est-à-dire aux quantités déduites des équations (3). On voit alors que, pour $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, les seconds membres des équations (12) sont identiquement les mêmes que ceux des équations (3), et que, par conséquent,

$$X_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0, \quad \dots,$$

$$Y_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0, \quad \dots,$$

Ainsi les séries (10) et (11) sont les mêmes, et les deux équations (9) sont vérifiées.

Existence des fonctions intégrales de p équations différentielles à p variables indépendantes.

50. Considérons actuellement un système de n équations aux diffé-

rentielles totales à p variables indépendantes

$$(13)\qquad \begin{cases} du_1 = X_{11}\,dx_1 + X_{12}\,dx_2 + \ldots + X_{1p}\,dx_p, \\ du_2 = X_{21}\,dx_1 + X_{22}\,dx_2 + \ldots + X_{2p}\,dx_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_n = X_{n1}\,dx_1 + X_{n2}\,dx_2 + \ldots + X_{np}\,dx_p, \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients différentiels X_{ik} sont des fonctions analytiques des $p+n$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_n$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité

$$(14)\qquad D_{x_h} X_{ik} + \sum_{g=1}^{g=n} X_{gh} D_{u_g} X_{ik} = D_{x_k} X_{ih} + \sum_{g=1}^{g=n} X_{gk} D_{u_g} X_{ih},$$

les indices h et k variant de 1 à p et l'indice i de 1 à n. Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ partent des points $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_p = 0$, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ayant des valeurs initiales égales à zéro. Nous supposons que les coefficients différentiels X_{ik} sont holomorphes pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ et pour toutes les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à $r_1, r_2, \ldots, r_n$; pour simplifier, nous remplacerons les rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ par le plus petit d'entre eux ρ, et de même les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ par le plus petit d'entre eux r. Appelons M le maximum des modules des fonctions X_{ik} dans cette étendue. Leurs dérivées partielles ont pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_p = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_n = 0$ des modules respectivement moindres que les dérivées partielles correspondantes de la fonction

$$\varphi = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{\rho}\right)\left(1 - \dfrac{u_1}{r}\right)\left(1 - \dfrac{u_2}{r}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{u_n}{r}\right)}$$

pour les mêmes valeurs des variables [1]. Si l'on compare les équations

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 333.

différentielles (13) aux équations différentielles

$$(15)\quad \begin{cases} dv_1 = \varphi\, dx_1 + \varphi\, dx_2 + \ldots + \varphi\, dx_p, \\ dv_2 = \varphi\, dx_1 + \varphi\, dx_2 + \ldots + \varphi\, dx_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dv_n = \varphi\, dx_1 + \varphi\, dx_2 + \ldots + \varphi\, dx_p, \end{cases}$$

où φ désigne la fonction précédente dans laquelle on remplace u_1, u_2, ..., u_n par v_1, v_2, ..., v_n, et si l'on admet que les fonctions intégrales existent de part et d'autre, on verra, comme précédemment, que les modules des dérivées partielles des fonctions u_i, déduites des premières par un calcul de proche en proche, sont, pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_p = 0$, respectivement moindres que les dérivées correspondantes des fonctions v_i déduites des secondes par un calcul analogue.

51. Il est facile d'intégrer les équations (15). Car on a

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v,$$

et chacune de ces équations se réduit à

$$\left(1 - \frac{v}{r}\right)^n dv = \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{\rho}}\, d(x_1 + x_2 + \ldots + x_p),$$

et donne l'équation finie

$$\frac{r}{n+1}\left[1 - \left(1 - \frac{v}{r}\right)^{n+1}\right] = -M\rho \log\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{\rho}\right),$$

d'où l'on déduit

$$(16)\quad v = r\left[1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)M\rho}{r}\log\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{\rho}\right)}\,\right],$$

en supposant que, pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_p = 0$, le logarithme s'annule et le radical ait la valeur $+1$. Cette fonction reste holomorphe, tant que le module de $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ est moindre que le nombre

$$p\rho' = \rho\left(1 - e^{-\frac{r}{(n+1)M\rho}}\right),$$

et, par conséquent, pour toutes les valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont les modules sont moindres que ρ', et son module est plus petit que r. Elle se développe en une série

$$(17) \qquad v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_0 \frac{x_1}{1} + \cdots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_p}\right)_0 \frac{x_p}{1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)_0 \frac{x_1^2}{1.2} + \cdots,$$

convergente dans la même étendue, et dont on peut calculer les coefficients à l'aide de l'une des équations (15), par un calcul de proche en proche.

Les séries

$$(18) \qquad u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)_0 \frac{x_1}{1} + \cdots + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right)_0 \frac{x_p}{1} + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}\right)_0 \frac{x_1^2}{1.2} + \cdots,$$

dont les coefficients sont les quantités déduites des équations (13) par le calcul de proche en proche, sont convergentes dans la même étendue, puisque les modules de ces coefficients sont moindres que les coefficients correspondants de la série (17). Ces séries définissent donc des fonctions holomorphes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, pour toutes les valeurs de ces variables dont les modules sont moindres que ρ'. On vérifiera, comme précédemment, que ces fonctions satisfont bien aux équations différentielles proposées (13).

Fonctions implicites de plusieurs variables.

52. L'existence des fonctions implicites de plusieurs variables se ramène à l'intégration des différentielles totales. Soit l'équation

$$(19) \qquad F(x, y, u) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe de x, y, u, dans le voisinage des valeurs initiales x_0, y_0, u_0. Si l'équation est vérifiée par une fonction holomorphe u des deux variables indépendantes x et y, cette fonction satisfera à l'équation différentielle

$$(20) \qquad du = -\frac{D_x F}{D_u F}\,dx - \frac{D_y F}{D_u F}\,dy = X\,dx + Y\,dy.$$

Si pour les valeurs initiales la dérivée partielle $D_u F$ n'est pas nulle, les fonctions X et Y étant holomorphes, la fonction u existe.

Soit maintenant un système d'équations simultanées

$$(21) \quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres sont des fonctions holomorphes des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans une certaine étendue. Si les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ vérifient ces équations, elles satisferont aux équations différentielles

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial F_1}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n} du_n = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial F_2}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial u_n} du_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial F_n}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial u_n} du_n = 0. \end{cases}$$

Lorsque, pour les valeurs initiales, le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on en déduit pour $du_1, du_2, \ldots, du_n$ des expressions de la forme (13), et la question est ramenée à l'intégration.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES.

Existence des fonctions intégrales.

53. Étant donnée une équation irréductible $F(x, y) = 0$ du degré m, nous avons désigné (n° **13**) par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ les p polynômes entiers en x et y, du degré $m-3$, qui entrent dans la formation d'un système d'intégrales abéliennes de première espèce

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx.$$

Considérons le système des p équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{Q_1(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}\, dx_1 + \dfrac{Q_1(x_2, y_2)}{F'_y(x_2, y_2)}\, dx_2 + \cdots + \dfrac{Q_1(x_p, y_p)}{F'_y(x_p, y_p)}\, dx_p = du_1, \\ \dfrac{Q_2(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}\, dx_1 + \dfrac{Q_2(x_2, y_2)}{F'_y(x_2, y_2)}\, dx_2 + \cdots + \dfrac{Q_2(x_p, y_p)}{F'_y(x_p, y_p)}\, dx_p = du_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{Q_p(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}\, dx_1 + \dfrac{Q_p(x_2, y_2)}{F'_y(x_2, y_2)}\, dx_2 + \cdots + \dfrac{Q_p(x_p, y_p)}{F'_y(x_p, y_p)}\, dx_p = du_p, \end{cases}$$

dans lesquelles nous regarderons les p quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme des fonctions des p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Nous représenterons ces équations par la notation abrégée

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{Q_i(x_k, y_k)}{F'_y(x_k, y_k)}\, dx_k = du_i,$$

en faisant varier l'indice i de 1 à p. On donne en outre les valeurs

initiales $(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})$ des p fonctions (x_k, y_k) pour les valeurs $u_i^{(0)}$ des variables u_i.

On peut mettre ces équations sous la forme finie

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} \int_{(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})}^{(x_k, y_k)} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)} dx = u_i - u_i^{(0)},$$

ou

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} [u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})] = u_i - u_i^{(0)}.$$

A chaque système de points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_p, y_p) correspond un système de valeurs des variables u_i, augmentées des mêmes multiples de 2p périodes correspondantes.

Résolvons les équations (1) par rapport à dx_1, dx_2, ..., dx_p. En appelant Δ le déterminant

$$(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} Q_1(x_1, y_1), & Q_1(x_2, y_2), & \ldots, & Q_1(x_p, y_p) \\ Q_2(x_1, y_1), & Q_2(x_2, y_2), & \ldots, & Q_2(x_p, y_p) \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ Q_p(x_1, y_1), & Q_p(x_2, y_2), & \ldots, & Q_p(x_p, y_p) \end{vmatrix},$$

et Δ_{ik} le déterminant mineur résultant de la suppression de la ligne de rang i et de la colonne de rang k, on en déduit

$$(6) \qquad dx_k = (-1)^k F'_y(x_k, y_k) \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^i \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} du_i.$$

Si, dans les équations (1), on regarde les quantités u_i comme des fonctions des variables x_k, chacun des coefficients différentiels ne contenant que la variable correspondante, les conditions d'intégrabilité sont évidemment satisfaites. On en conclut que, réciproquement, dans les équations (6), où l'on regarde les quantités x_k comme des fonctions des variables u_i, les coefficients différentiels satisfont aussi aux conditions d'intégrabilité. En vertu du théorème général sur l'intégration des équations aux différentielles totales (n° 50), il existe

p fonctions x_k des p variables u_i, satisfaisant aux équations (6), et admettant les valeurs initiales données. Ces fonctions x_k restent holomorphes par rapport à chacune des variables u_i, tant que les coefficients différentiels restent eux-mêmes holomorphes par rapport aux quantités x_k qu'ils renferment. Les coefficients différentiels peuvent cesser d'être holomorphes, soit lorsque les fonctions x_k acquièrent des valeurs finies qui annulent le dénominateur, soit lorsqu'une ou plusieurs d'entre elles deviennent infinies.

Le déterminant Δ est une fonction entière et alternée des p points (x_k, y_k), du degré $m-3$ par rapport à chacun d'eux. Le déterminant mineur Δ_{ik}, qui est indépendant du point (x_k, y_k), est une fonction alternée des $p-1$ autres points.

Loi de permutation des fonctions intégrales.

54. Le déterminant Δ s'annule d'abord lorsque, dans leur variation, deux ou un plus grand nombre de points (x_k, y_k) viennent à coïncider. Supposons que, pour certaines valeurs des variables u_i, les n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) coïncident avec un point (ξ, η), différent des points critiques de l'équation $F(x, y) = o$. Posons

$$x_1 = \xi + x'_1, \quad x_2 = \xi + x'_2, \quad \ldots, \quad x_n = \xi + x'_n,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ étant des quantités infiniment petites, et remplaçons ces n quantités par les fonctions symétriques

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1 = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n, \\ z_2 = x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = x'^n_1 + x'^n_2 + \ldots + x'^n_n. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$N_i^{(r)} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{i+k} r x'^{r-1}_k F'_y(x_k, y_k) \Delta_{ik},$$

le système des équations (6) sera remplacé par le système équiva-

lent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} dz_r &= \sum_{i=1}^{i=\mathrm{p}} \frac{\mathrm{N}_i^{(r)}}{\Delta}\, du_i,\\ dx_{n+s} &= (-1)^{n+s}\,\mathrm{F}'_y(x_{n+s}, y_{n+s}) \sum_{i=1}^{i=\mathrm{p}} (-1)^i \frac{\Delta_{i,n+s}}{\Delta}\, du_i, \end{aligned}\right.$$

les indices r et s variant, le premier de 1 à n, le second de 1 à $\mathrm{p}-n$.

Les n racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant voisines d'une même racine simple de l'équation $\mathrm{F}(x, y) = 0$, et, par conséquent, appartenant à une même branche de la fonction algébrique y de x, sont représentées par la même série

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= \eta + \eta' x'_1 + \eta'' x'^2_1 + \ldots,\\ y_2 &= \eta + \eta' x'_2 + \eta'' x'^2_2 + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_n &= \eta + \eta' x'_n + \eta'' x'^2_n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Après la substitution de ces valeurs, le déterminant Δ devient une fonction alternée des n quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, et il est divisible par le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs binômes $x'_g - x'_h$, dans lesquels les indices g et h sont des nombres entiers différents, égaux ou inférieurs à n; le quotient, qui est une fonction symétrique de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, se transforme en une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Le déterminant mineur $\Delta_{i,n+s}$ étant aussi une fonction alternée des quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, est divisible par le même produit, et le quotient est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Le numérateur $\mathrm{N}_i^{(r)}$ est le déterminant que l'on obtient quand on remplace dans le déterminant Δ la ligne horizontale de rang i par les quantités

$$r x'^{r-1}_1 \mathrm{F}'_y(x_1, y_1),\quad r x'^{r-1}_2 \mathrm{F}'_y(x_2, y_2),\quad \ldots,\quad r x'^{r-1}_n \mathrm{F}'_y(x_n, y_n),\quad 0,\quad 0,\quad \ldots,\quad 0;$$

ce sera aussi une fonction alternée de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, divisible par le même produit. En général, le quotient du déterminant Δ par le produit des facteurs binômes $x'_g - x'_h$ ne s'annule pas avec les quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Dans ce cas, après la suppression des facteurs communs, les coefficients différentiels, dans les équations (8), deviennent

des fonctions holomorphes de $z_1, z_2, \ldots, z_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p$. On en conclut, d'après le théorème général sur l'intégration, que les fonctions intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p$ de ce système d'équations différentielles restent holomorphes dans le voisinage des valeurs considérées des variables u_i. Il est clair que toute fonction entière et symétrique des n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jouit de la même propriété.

Les n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui deviennent égales, étant les racines d'une équation du degré n,

$$(10) \qquad x^n - \psi_1 x^{n-1} + \psi_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \psi_n = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables u_i, dans le voisinage des valeurs considérées, reprennent les mêmes valeurs pour les mêmes valeurs des variables, ou se permutent entre elles. Supposons, par exemple, que l'on attribue aux variables u_i des accroissements de la forme $t\lambda_i(t)$, t étant une variable infiniment petite, et $\lambda_i(t)$ des fonctions arbitraires de t, développables en séries entières; quand la variable t tourne autour du point $t = 0$, les n racines se permutent en formant un ou plusieurs systèmes circulaires. Comme à chaque valeur de x est jointe une valeur déterminée de y, d'après les équations (9), les n points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ se permutent suivant la même loi.

Si, en même temps, un second groupe de points (x_{n+1}, y_{n+1}), $(x_{n+2}, y_{n+2}), \ldots, (x_{n+n'}, y_{n+n'})$ coïncidait avec un autre point, différent aussi des points critiques, on effectuerait une seconde transformation analogue à la précédente, et l'on arriverait à la même conséquence.

55. Supposons que, pour certaines valeurs des variables u_i, les n points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ viennent coïncider avec un point critique (a, b), et que les n racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ appartiennent à un même système circulaire de p racines. On effectuera la série des transformations relatives à ce système circulaire (Chap. I), ce qui revient à la substitution

$$(11) \qquad \begin{cases} x = a + x'^p, \\ y = b + b'x'^{q_1} + b''x'^{q_2} + \ldots + y'x'^{q_t}, \end{cases}$$

d'après les équations (3), quand les points (x_k, y_k) décrivent des lignes aboutissant à des points donnés, les quantités u_i décrivent des lignes correspondantes et acquièrent des valeurs finies et déterminées. Réciproquement, si les variables u_i décrivent les secondes lignes, les fonctions (x_k, y_k) décrivent les premières. Ainsi, il y a des systèmes de valeurs des variables u_i pour lesquelles n fonctions (x_k, y_k) deviennent égales à une quantité donnée, n' égales à une autre quantité donnée, etc.

Cas d'indétermination.

56. Le déterminant Δ peut aussi s'annuler, sans que deux des points (x_k, y_k) coïncident. D'après ce que nous avons dit au n° **13**, l'équation générale des courbes du degré $m-3$, qui satisfont aux conditions relatives aux points multiples de la courbe $F=0$, est

$$(13) \qquad Q = M_1 Q_1(x, y) + M_2 Q_2(x, y) + \ldots + M_p Q_p(x, y) = 0,$$

$M_1, M_2, \ldots, M_p$ étant des constantes arbitraires. La condition $\Delta = 0$ signifie que les p points (x_k, y_k) sont situés sur une courbe $Q=0$ de cette espèce.

Supposons que les points (x_k, y_k) viennent coïncider respectivement avec p points (ξ_k, η_k) situés sur une courbe $Q=0$, du degré $m-3$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, et appelons γ_i les valeurs correspondantes des variables u_i. La courbe $Q=0$ coupe la courbe $F=0$ en $2p-2$ points différents des points critiques (n° **14**), savoir les p points (ξ_k, η_k) et $p-2$ autres points que nous désignerons par (α_k, β_k). D'après le théorème d'Abel (n° **45**), on a, pour chaque intégrale abélienne,

$$(14) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\xi_k, \eta_k) + \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) \equiv K_i,$$

K_i étant une constante, d'où l'on déduit

$$(15) \qquad \gamma_i - u_i^{(0)} \equiv K_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k^{(0)}, y_k^{(0)}).$$

tielles soient nulles séparément, et par conséquent que la courbe variable $Q=0$ passe par $p-2$ points fixes (α_k, β_k).

58. Supposons que les points (x_k, y_k) soient voisins des points (ξ_k, η_k), situés sur la courbe $Q=0$, représentée par l'équation (13). Si l'on pose $x_k=\xi_k+x'_k$, $u_i=\gamma_i+u'_i$, on a, en développant en séries,

$$y_k=\eta_k+\eta'_k x'_k+\eta''_k x'^2_k+\ldots,$$
$$\frac{Q_i(x_k, y_k)}{F'_y(x_k, y_k)}=A_{ik}+2A'_{ik}x'_k+3A''_{ik}x'^2_k+\ldots,$$
$$\frac{Q\,(x_k, y_k)}{F'_y(x_k, y_k)}=2\mathcal{A}'_k x'_k+3\mathcal{A}''_k x'^2_k+\ldots,$$

et les équations (1) donnent par l'intégration

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}(A_{ik}x'_k+A'_{ik}x'^2_k+\ldots)=u'_i.$$

On peut remplacer l'une des équations (1) par l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p}\frac{Q\,(x_k, y_k)}{F'_y(x_k, y_k)}\,dx_k=d(M_1u'_1+M_2u'_2+\ldots+M_pu'_p),$$

d'où l'on déduit

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}(\mathcal{A}'_k x'^2_k+\mathcal{A}''_k x'^3_k+\ldots)=M_1u'_1+M_2u'_2+\ldots+M_pu'_p.$$

Les quantités u'_i sont des quantités infiniment petites du premier ordre, comme les quantités x'_k; mais le second membre de l'équation (17) est une quantité infiniment petite du second ordre. Si l'on pose, comme précédemment (n° 54), $u'_i=t\lambda_i(t)$, en désignant par t une quantité infiniment petite du premier ordre, on en conclut que les valeurs limites des fonctions $\lambda_i(t)$ satisfont à la relation linéaire

$$(18)\qquad M_1\lambda_1(0)+M_2\lambda_2(0)+\ldots+M_p\lambda_p(0)=0.$$

infiniment voisines de ξ'_k. De cette manière, les fonctions passeront, par une variation continue, des valeurs $\xi_k + x'_k$ aux valeurs très-différentes $\xi'_k + x''_k$.

Quand nous avons étudié la marche des fonctions, lorsque n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) coïncident (n° 54), nous avons supposé que le quotient du déterminant Δ par le produit des facteurs binômes $x'_g - x'_h$ ne s'annule pas avec x'_1, x'_2, ..., x'_n. Le cas où ce quotient est égal à zéro rentre dans celui où les p points (x_k, y_k) sont situés sur une courbe du degré $m-3$. Car, lorsque les points sont différents, cette condition signifie que les points sont situés sur une courbe du degré $m-3$; dans le cas actuel, on regardera les n premiers points comme étant infiniment rapprochés.

Définition des fonctions abéliennes.

60. De ce qui précède, on conclut que, à l'exception des valeurs des variables pour lesquelles il y a indétermination, toute fonction rationnelle et symétrique des p quantités x_1, x_2, ..., x_p est une fonction monotrope et méromorphe des p variables indépendantes u_1, u_2, ..., u_p. On a donné à ces fonctions symétriques le nom de *fonctions abéliennes*. Si l'on considère, en particulier, les fonctions symétriques

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_p, \\ \varphi_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_p = x_1 x_2 \ldots x_p, \end{cases}$$

les fonctions intégrales x_1, x_2, ..., x_p des équations différentielles (1) seront les racines de l'équation

$$(20)\qquad x^p - \varphi_1 x^{p-1} + \varphi_2 x^{p-2} - \ldots + (-1)^p \varphi_p = 0,$$

du degré p. Comme à chaque valeur de x_k est jointe une valeur déterminée de y_k, il en résulte qu'*à tout système de valeurs des variables u_i*, excepté celles pour lesquelles il y a indétermination, *correspond un seul système de points* (x_k, y_k). L'intégration des équations

dépendantes u_i par de nouvelles variables u'_j définies par les relations

$$u'_j = \sum_{i=1}^{i=p} M_{ji} u_i,$$

sans changer les fonctions x_k. En adoptant les périodes normales, les systèmes de périodes correspondantes sont alors

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
\text{pour } u_1 & 2\pi\sqrt{-1} & 0 & \ldots & 0 & 2\alpha_{11} & 2\alpha_{12} & \ldots & 2\alpha_{1p} \\
u_2 & 0 & 2\pi\sqrt{-1} & \ldots & 0 & 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & \ldots & 2\alpha_{2p} \\
\ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_p & 0 & 0 & \ldots & 2\pi\sqrt{-1} & 2\alpha_{p1} & 2\alpha_{p2} & \ldots & 2\alpha_{pp}
\end{array},$$

et la relation qui existe entre les périodes relatives aux deux variables u_i et u_k se réduit à

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik}. \tag{22}$$

Afin de simplifier, nous remplacerons, dans les équations (4),

$$u_i - u_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k^{(0)}, y_k^{(0)})$$

par u_i; ces équations prennent alors la forme

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) = u_i. \tag{23}$$

Ceci revient à supposer que les variables u_i sont égales à zéro, quand les p points (x_k, y_k) coïncident avec le point (x_0, y_0), choisi comme origine dans la définition des intégrales abéliennes. La formule (15), qui donne les valeurs γ_i des variables pour lesquelles il y a indétermination, se réduit à

$$\gamma_i = K_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k). \tag{24}$$

Cas des fonctions ultra-elliptiques.

61. Les intégrales ultra-elliptiques (n° 37) étant de la forme

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x^{i-1}}{y} dx,$$

on a les équations différentielles

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{x_k^{i-1}}{y_k} dx_k = du_i. \tag{25}$$

Occupons-nous surtout de l'indétermination. Le polynôme Q étant ici un polynôme entier en x du degré $p - 1$, la courbe $Q = 0$ se réduit à $p - 1$ droites de la forme $x = \xi$; elle coupe la courbe

$$y^2 = G(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2p+2})$$

en $2p - 2$ points, symétriques deux à deux, c'est-à-dire de la forme (x, y), $(x, -y)$. Des p points (ξ_k, η_k) situés sur la ligne $Q = 0$, deux sont nécessairement symétriques; le second point (ξ_2, η_2) coïncide, par exemple, avec le point $(\xi_1, -\eta_1)$, symétrique du premier (ξ_1, η_1); alors les $p - 2$ autres points d'intersection, que nous avons désignés par (α_k, β_k), coïncident respectivement avec les points $(\xi_3, -\eta_3)$, $(\xi_4, -\eta_4)$, ..., $(\xi_p, -\eta_p)$, symétriques des suivants (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4), ..., (ξ_p, η_p). Si les points (α_k, β_k) sont fixes, les $p - 2$ derniers points (ξ_k, η_k) le sont également, tandis que les deux premiers varient en restant symétriques l'un de l'autre. Dans les premiers membres des équations (25), les $p - 2$ derniers termes sont nuls, tandis que les premiers sont égaux et de signes contraires, et l'on a $du_i = 0$. La ligne $Q = 0$ a pour équation

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= M_p(x - \xi_1)(x - \xi_3)(x - \xi_4) \ldots (x - \xi_p) \\ &= M_1 + M_2 x + M_3 x^2 + \ldots + M_p x^{p-1} = 0; \end{aligned} \right. \tag{26}$$

les coefficients dépendent des $p - 2$ quantités fixes ξ_3, ξ_4, ..., ξ_p, et contiennent l'abscisse variable ξ_1 au premier degré.

Supposons que les variables u_i passent des valeurs γ_i à des valeurs infiniment voisines $\gamma_i + t\lambda_i(t)$ (n° 59); la relation (18) du n° 58 déterminera ξ_1 par une équation du premier degré. Conservant la première des équations (25), celle qui correspond à $i = 1$, nous remplacerons les suivantes, excepté la dernière, par les équations

$$(27) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{x_k'^{i-2}(x_k - \xi_1)}{y_k} dx_k = d(u_i' - \xi_1 u_{i-1}'),$$

l'indice i variant de 2 à $p - 1$, et la dernière par

$$(28) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{Q(x_k)}{y_k} dx_k = d(M_1 u_1' + M_2 u_2' + \ldots + M_p u_p').$$

Comme on a

$$y_1 = \eta_1 + \eta_1' x_1' + \eta_1'' x_1'^2 + \ldots,$$
$$y_2 = -\eta_1 - \eta_1' x_2' - \eta_1'' x_2'^2 + \ldots,$$

les deux premiers termes, dans toutes ces équations, sont alternés par rapport à x_1' et x_2'. On en déduit, par l'intégration,

$$(29) \quad A_1(x_1' - x_2') + A_1'(x_1'^2 - x_2'^2) + \ldots + \sum_{k=3}^{k=p} (A_k x_k' + A_k' x_k'^2 + \ldots) = u_1',$$

$$(30) \quad A_{ik}'(x_1'^2 - x_2'^2) + \ldots + \sum_{k=3}^{k=p} (A_{ik} x_k' + \ldots) = u_i' - \xi_1 u_{i-1}',$$

$$(31) \quad \mathcal{A}_1'(x_1'^2 - x_2'^2) + \ldots + \sum_{k=3}^{k=p} (\mathcal{A}_k' x_k'^2 + \ldots) = M_1 u_1' + M_2 u_2' + \ldots + M_p u_p'.$$

Des $p - 2$ équations (30), on tirera les valeurs de x_3', x_4', ..., x_p' exprimées par des séries entières en t, x_1', x_2', de la forme

$$(32) \qquad x_k' = g_k t + g_k' t^2 + \ldots + (x_1' - x_2') f_k(t, x_1', x_2'),$$

les fonctions f_k ne contenant pas de terme constant. En portant ces valeurs dans les équations (29) et (31), on obtiendra des équations

CHAPITRE X.

LA FONCTION Θ.

Séries à p dimensions.

62. Les propriétés des séries à double entrée [1], ou à deux dimensions, peuvent être facilement généralisées et étendues aux séries à p dimensions. Considérons d'abord une série à triple entrée, ou à trois dimensions; un terme quelconque est affecté de trois indices, que l'on fait varier de $-\infty$ à $+\infty$; ayant choisi une unité de longueur arbitraire, on peut regarder ces trois indices comme étant les coordonnées d'un point par rapport à trois axes rectangulaires dans l'espace, et supposer que le terme de la série est placé en ce point. On dira que la série est convergente, lorsque la somme des termes enveloppés par une surface de forme quelconque tend vers une limite déterminée, quand cette surface s'étend à l'infini dans tous les sens. On démontrera, comme pour les séries à deux dimensions, que, lorsque la série formée par les modules des termes est convergente pour une forme particulière de la surface, la série proposée est convergente d'une manière absolue, c'est-à-dire que la convergence a lieu et que la limite est la même, quelle que soit la forme de la surface.

Dans les séries à p dimensions, un terme quelconque est affecté de p indices, que l'on fait varier de $-\infty$ à $+\infty$. Par analogie, on appellera *point*, dans l'espace à p dimensions, un système de valeurs réelles attribuées à p variables x_1, x_2, ..., x_p, *surface* le lieu des points satisfaisant à une équation entre ces variables. Mais, dans l'espace à p dimensions, il convient de distinguer des surfaces à un nombre plus ou moins grand de dimensions, suivant le nombre des

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 106.

variables qui restent indépendantes. Ainsi, la surface proprement dite, ou le lieu des points qui satisfont à une seule équation, est une surface à $p-1$ dimensions. Le lieu des points qui satisfont à deux équations simultanées, ou l'intersection de deux surfaces à $p-1$ dimensions, est une surface à $p-2$ dimensions, et ainsi de suite; enfin la surface à une dimension, ou la *ligne*, est le lieu des points qui satisfont à $p-1$ équations simultanées. Si les équations sont algébriques et du premier degré, on dira que les surfaces sont *planes*, ou que la ligne est *droite*.

L'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - R^2 = 0$$

représente une surface *sphérique* de rayon R, ayant pour centre l'origine. Le lieu des points qui rendent négatif le premier membre de cette équation est le *volume* de la sphère. En général, soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ une équation à coefficients réels, dont le terme indépendant des variables soit négatif, et telle qu'une droite quelconque passant par l'origine, $x_1 = a_1 x_p$, $x_2 = a_2 x_p$, $\ldots$, $x_{p-1} = a_{p-1} x_p$, rencontre la surface en deux points réels situés de part et d'autre de l'origine, c'est-à-dire ayant des coordonnées de signes contraires; la partie de l'espace enveloppée par cette surface fermée est le lieu des points qui rendent négatif le premier membre de l'équation.

Dans les séries à p dimensions, on peut regarder les p indices comme étant les coordonnées d'un point de l'*hyperespace*, et supposer le terme de la série placé en ce point. Considérons une suite de surfaces fermées S_0, S_1, S_2, ..., analogues à la précédente, et s'étendant à l'infini dans tous les sens, c'est-à-dire telles que l'on puisse prendre n assez grand pour que la surface S_n, et chacune des suivantes S_{n+1}, S_{n+2}, ..., soit extérieure à une sphère de rayon donné R ayant pour centre l'origine; si la somme des termes enveloppés par la surface S_n tend vers une limite déterminée, indépendante de la forme de la surface, on dira que la série est convergente. Lorsque la série formée par les modules des termes est convergente pour une forme particulière de la surface, elle l'est pour toute autre forme de la surface, et la série proposée est elle-même convergente et la limite de la somme des termes est indépendante de la forme de la surface.

63. La fonction Θ d'une seule variable est définie par la série linéaire

$$\Theta(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{mx+m^2\alpha},$$

dans laquelle la constante α a sa partie réelle négative et différente de zéro [1]. Elle est paire et satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
\Theta(x+2\pi\sqrt{-1}) &= \Theta(x),\\
\Theta(x+2\alpha) &= e^{-x-\alpha}\Theta(x),\\
\Theta(x+2n\alpha) &= e^{-nx-n^2\alpha}\Theta(x);
\end{aligned}$$

elle s'annule pour les valeurs de x comprises dans la formule

$$x = (2n+1)\pi\sqrt{-1} + (2p+1)\alpha,$$

où n et p sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

La fonction

$$\frac{\Theta(x+a)\Theta(x+a')}{\Theta(x+b)\Theta(x+b')},$$

dans laquelle a, a', b, b' sont des constantes satisfaisant à la relation $a+a'=b+b'$, est une fonction méromorphe de x, doublement périodique et admettant les deux périodes $2\pi\sqrt{-1}$ et 2α.

Fonction Θ de deux variables.

64. La fonction Θ, imaginée par Jacobi, a été étendue par lui à un nombre quelconque de variables. La fonction de deux variables x et y est définie par la série à double entrée

$$(1) \qquad \Theta(x,y) = \mathbf{S}\, e^{(mx+ny)+(m^2\alpha+n^2\beta+2mn\gamma)},$$

dans laquelle m et n sont des nombres entiers que l'on fait varier de

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 110.

$-\infty$ à $+\infty$, α, β, γ des constantes dont les parties réelles α', β', γ' sont telles que la partie réelle du polynôme homogène et du second degré $m^2\alpha + n^2\beta + 2mn\gamma$ ait une valeur négative et différente de zéro, pour toutes les valeurs réelles de m et n. Pour abréger, nous désignerons par P ce polynôme et par P′ sa partie réelle.

Soit $x = x' + x''\sqrt{-1}$, $y = y' + y''\sqrt{-1}$; le module d'un terme de la série est

$$e^{mx'+ny'+m^2\alpha'+n^2\beta'+2mn\gamma'} = e^{mx'+ny'+P'},$$

ou

$$e^{n(tx'+y')+n^2(\alpha't^2+2\gamma't+\beta')},$$

en posant $\frac{m}{n} = t$. Pour que la série linéaire formée par les termes dans lesquels le rapport $\frac{m}{n}$ a une même valeur t soit convergente, il faut que le trinôme $\alpha't^2 + 2\gamma't + \beta'$ ait une valeur négative; comme ceci doit avoir lieu pour toutes les valeurs commensurables et, par conséquent, pour toutes les valeurs réelles de t, il est nécessaire que les quantités α' et β' soient négatives et différentes de zéro et que le discriminant $\alpha'\beta' - \gamma'^2$ ait une valeur positive et différente de zéro.

Ces conditions suffisent pour la convergence de la série proposée. Car, si l'on pose

$$a = \frac{\alpha'\beta' - \gamma'^2}{2\beta'}, \quad b = \frac{\alpha'\beta' - \gamma'^2}{2\alpha'},$$

a et b étant des quantités négatives, on a

$$P' = \beta'\left(n + \frac{\gamma'}{\beta'}m\right)^2 + 2am^2 < 2am^2,$$

$$P' = \alpha'\left(m + \frac{\gamma'}{\alpha'}n\right)^2 + 2bn^2 < 2bn^2,$$

et par suite

$$P' < am^2 + bn^2.$$

Le module d'un terme de la série est moindre que

$$e^{mx'+ny'+am^2+bn^2} = e^{mx'+m^2a} \times e^{ny'+n^2b}.$$

La somme des modules des termes enveloppés par une courbe fermée

quelconque est plus petite que

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{mx'+m^2a} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{ny'+n^2b}.$$

Le premier facteur est la fonction $\Theta_a(x')$ formée avec la constante réelle et négative a, le second la fonction $\Theta_b(y')$ formée avec la constante b, qui est aussi réelle et négative.

65. Nous allons démontrer que la fonction $\Theta(x, y)$, définie par la série (1), est holomorphe par rapport à chacune des variables x et y, pour tous les systèmes de valeurs attribuées à ces variables. Si l'on remplace, en effet, dans cette série les exponentielles e^{mx}, e^{ny} par les séries qu'elles représentent, savoir

$$e^{mx} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{m^p x^p}{1.2\ldots p}, \quad e^{ny} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{n^q y^q}{1.2\ldots q},$$

on obtient une série à quatre dimensions

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{S}\, e^{m^2\alpha+n^2\beta+2mn\gamma} \frac{m^p x^p}{1.2\ldots p} \frac{n^q y^q}{1.2\ldots q},$$

les nombres p et q variant de zéro à $+\infty$ et les nombres m et n de $-\infty$ à $+\infty$. Cette série est convergente; car, si l'on désigne par r et r' les modules de x et y, et par m' et n' les valeurs absolues de m et n, la somme des modules des termes qui correspondent à $m = \pm m'$, $n = \pm n'$ est moindre que

$$4 e^{m'^2a+n'^2b} \frac{m'^p r^p}{1.2\ldots p} \frac{n'^q r'^q}{1.2\ldots q}.$$

En laissant m' et n' fixes, et faisant varier p et q de zéro à $+\infty$, on obtient une somme égale à

$$4 e^{m'^2a+n'^2b} e^{m'r} e^{n'r'} = 4 e^{m'r+m'^2a} \times e^{n'r'+n'^2b}.$$

En faisant varier ensuite m' et n' de zéro à $+\infty$, on obtient une

Le nombre entier m', qui diffère de m d'un nombre constant p, variant comme lui de $-\infty$ à $+\infty$, cette dernière série n'est autre que la série (1); on en conclut la relation

$$(7) \qquad \Theta(x+2p\alpha, y+2p\gamma) = e^{-px-p^2\alpha}\,\Theta(x,y).$$

On a de même

$$(8) \qquad \Theta(x+2q\gamma, y+2q\beta) = e^{-qy-q^2\beta}\,\Theta(x,y),$$

q étant un nombre entier.

De ces deux relations, on en déduit une autre plus générale

$$(9) \quad \Theta(x+2p\alpha+2q\gamma, y+2p\gamma+2q\beta) = e^{-(px+qy)-(p^2\alpha+q^2\beta+2pq\gamma)}\,\Theta(x,y).$$

En particulier, si dans les relations (7) et (8) on fait $p=1$ et $q=1$, il vient

$$(10) \qquad \Theta(x+2\alpha, y+2\gamma) = e^{-x-\alpha}\,\Theta(x,y),$$
$$(11) \qquad \Theta(x+2\gamma, y+2\beta) = e^{-y-\beta}\,\Theta(x,y).$$

67. Il est évident, à cause de la convergence, que la série (1) ne change pas, quand on y remplace les deux nombres entiers variables m et n par $m-p$ et $n-q$, p et q étant des nombres entiers arbitraires fixes, ce qui donne

$$\Theta(x,y) = \mathbf{S}\, e^{(m-p)x+(n-q)y+(m-p)^2\alpha+(n-q)^2\beta+2(m-p)(n-q)\gamma}.$$

On a d'ailleurs, en remplaçant m et n par $-m$ et $-n$,

$$\Theta(x,y) = \mathbf{S}\, e^{-mx-ny+m^2\alpha+n^2\beta+2mn\gamma}.$$

En désignant les deux exposants par A et B, et prenant la demi-somme de ces deux quantités égales, on en déduit

$$\Theta(x,y) = \frac{1}{2}\mathbf{S}\,(e^{A}+e^{B}).$$

Les deux exponentielles sont égales et de signes contraires, lorsque la différence

$$A - B = (2m - p)(x - p\alpha - q\gamma) + (2n - q)(y - p\gamma - q\beta)$$

des exposants est égale à un multiple impair de $\pi\sqrt{-1}$. Si l'on attribue à x et à y des valeurs de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} x = m'\pi\sqrt{-1} + p\alpha + q\gamma, \\ y = n'\pi\sqrt{-1} + p\gamma + q\beta, \end{cases}$$

m' et n' étant des nombres entiers, il suffit, pour que cela ait lieu, que le nombre $m'p + n'q$ soit impair. Tous les termes de la dernière série étant alors nuls séparément, la fonction est nulle. On en conclut que la fonction $\Theta(x, y)$ s'annule pour les valeurs de x et de y comprises dans les formules (12), où m', n', p, q sont des nombres entiers assujettis à la condition que le nombre $m'p + n'q$ soit impair. Mais nous verrons plus tard que la fonction s'annule pour une infinité d'autres systèmes de valeurs de x et y.

Il résulte de ce qui précède que la fonction

$$(13) \qquad \frac{\Theta(x + a, y + b)\Theta(x + a_1, y + b_1)}{\Theta(x + a', y + b')\Theta(x + a'_1, y + b'_1)},$$

où a, b, ... désignent des constantes satisfaisant aux deux relations

$$a + a_1 = a' + a'_1, \quad b + b_1 = b' + b'_1,$$

reprend la même valeur, quand on ajoute séparément aux deux variables x et y la quantité $2\pi\sqrt{-1}$ et quand on leur ajoute simultanément les quantités 2α et 2γ, ou 2γ et 2β. C'est donc une fonction méromorphe de ces deux variables, et qui admet les quatre paires de périodes conjuguées, savoir

$$\begin{array}{r|cccc|} \text{pour } x & 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 2\alpha, & 2\gamma \\ \text{pour } y & 0, & 2\pi\sqrt{-1}, & 2\gamma, & 2\beta \end{array}.$$

Fonction Θ à p variables.

68. Il est facile de généraliser la définition de la fonction Θ. Nous désignerons par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p variables, par $m_1, m_2, \ldots, m_p$ un système de p nombres entiers, et par P le polynôme homogène et du second degré

$$P = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik},$$

qui contient $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes α_{ik}, telles que $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$; ce polynôme est de la forme

$$P = m_1^2 \alpha_{11} + m_2^2 \alpha_{22} + \ldots + 2 m_1 m_2 \alpha_{12} + \ldots.$$

Nous supposerons que les parties réelles α'_{ik} des constantes α_{ik} sont telles que la partie réelle P′ du polynôme P ait une valeur négative pour toutes les valeurs réelles de $m_1, m_2, \ldots, m_p$. La fonction Θ des p variables est définie par la série

$$(1) \qquad \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathrm{S}\, e^{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p) + P},$$

dans laquelle les p nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ varient de $-\infty$ à $+\infty$.

Soit $x_i = x'_i + x''_i \sqrt{-1}$; le module d'un terme de la série est

$$e^{(m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + \ldots + m_p x'_p) + P'}.$$

Si l'on pose

$$m_2 = t_2 m_1, \quad m_3 = t_3 m_1, \quad \ldots, \quad m_p = t_p m_1,$$

le polynôme du second degré P′ devient

$$P' = m_1^2 (\alpha'_{11} + t_2^2 \alpha'_{22} + t_3^2 \alpha'_{33} + \ldots + 2 t_2 \alpha_{12} + 2 t_2 t_3 \alpha_{23} + \ldots).$$

Pour que la série linéaire formée par les termes dans lesquels les rap-

ports des nombres m_2, m_3, ... à m_1 ont respectivement les mêmes valeurs t_2, t_3, ... soit convergente, il faut que le polynôme placé entre parenthèses ait une valeur négative; comme ceci doit avoir lieu pour toutes les valeurs commensurables et, par conséquent, pour toutes les valeurs réelles de ces rapports, le polynôme P′ devra avoir une valeur négative pour toutes les valeurs réelles de m_1, m_2, ..., m_p. Il faut pour cela que, si l'on décompose ce polynôme en une somme de p carrés, tous les carrés soient affectés de coefficients négatifs et différents de zéro.

Ces conditions suffisent pour la convergence de la série. Imaginons, en effet, le polynôme P′ décomposé en une somme de carrés dans un ordre quelconque, et soit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}'}{p} &= a_1 m_1^2 + b_1(m_1, m_2)^2 + c_1(m_1, m_2, m_3)^2 + \ldots + h_1(m_1, m_2, \ldots, m_p)^2 \\ &= a_2 m_2^2 + b_2(m_2, m_3)^2 + c_2(m_2, m_3, m_1)^2 + \ldots + h_2(m_2, m_3, \ldots, m_1)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a_p m_p^2 + b_p(m_p, m_1)^2 + c_p(m_p, m_1, m_2)^2 + \ldots + h_p(m_p, m_1, \ldots, m_{p-1})^2,\end{aligned}$$

en disposant les quantités suivant l'ordre circulaire des indices, et désignant par (m_1, m_2), (m_1, m_2, m_3), ... des polynômes homogènes et du premier degré de deux, trois, ... lettres. Tous les coefficients étant négatifs, on en déduit

$$\mathrm{P}' < a_1 m_1^2 + a_2 m_2^2 + \ldots + a_p m_p^2 = \sum_{i=1}^{i=p} a_i m_i^2.$$

Le module d'un terme de la série est moindre que

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p}(m_i x_i' + m_i^2 a_i)} = e^{m_1 x_1' + m_1^2 a_1} \times e^{m_2 x_2' + m_2^2 a_2} \times \ldots \times e^{m_p x_p' + m_p^2 a_p}.$$

La somme des modules des termes enveloppés par une surface quelconque est plus petite que le produit

$$\Theta_{a_1}(x_1')\,\Theta_{a_2}(x_2')\ldots\Theta_{a_p}(x_p')$$

de p fonctions Θ d'une seule variable réelle et, par conséquent, la série est convergente.

15.

La fonction définie par la série (1) est holomorphe. Si l'on remplace, en effet, chacune des exponentielles $e^{m_i x_i}$ par la série qu'elle représente, savoir

$$e^{m_i x_i} = \sum_{q_i=0}^{q_i=\infty} \frac{m_i^{q_i} x_i^{q_i}}{1.2\ldots q_i},$$

on obtient la série à $2p$ dimensions

$$(2) \qquad \mathrm{S}\frac{m_1^{q_1} x_1^{q_1}}{1.2\ldots q_1} \frac{m_2^{q_2} x_2^{q_2}}{1.2\ldots q_2} \cdots \frac{m_p^{q_p} x_p^{q_p}}{1.2\ldots q_p} e^{\mathrm{P}},$$

dans laquelle les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_p$ varient de zéro à $+\infty$, et les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ de $-\infty$ à $+\infty$. Cette dernière série est convergente; car si l'on désigne par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les modules de x_1, $x_2, \ldots, x_p$, et par $m'_1, m'_2 \ldots, m'_p$ les valeurs absolues de $m_1, m_2, \ldots$, m_p, la somme des termes qui correspondent à $m_1 = \pm m'_1$, $m_2 = \pm m'_2$, $\ldots$, $m_p = \pm m'_p$ est moindre que

$$2^p \prod_{i=1}^{i=p} \frac{m_i'^{q_i} r_i^{q_i}}{1.2\ldots q_i} e^{a_i m_i'^2}.$$

En laissant fixes les nombres m'_i et faisant varier les nombres q_i de zéro à $+\infty$, on obtient une somme égale à

$$2^p \prod_{i=1}^{i=p} e^{m'_i r_i + m_i'^2 a_i};$$

en faisant varier ensuite les nombres m'_i de zéro à $+\infty$, on obtient une somme plus petite que celle que l'on obtiendrait en faisant varier ces nombres de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire plus petite que

$$2^p \prod_{i=1}^{i=p} \Theta_{a_i}(r_i).$$

Ainsi la série (2) est convergente.

Quand on l'évalue en faisant varier d'abord les nombres q_i, on reproduit la série (1). Si on l'évalue en faisant varier d'abord les nombres m_i, on obtient une série

$$(3) \qquad \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathrm{S}\, A_{q_1 q_2 \ldots q_p} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_p^{q_p},$$

ordonnée suivant les puissances entières et positives des variables. C'est le type des fonctions holomorphes de p variables.

69. Pour abréger l'écriture, nous représenterons la fonction $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p variables par $\Theta(x_i)$, en convenant de désigner par x_i l'ensemble des p variables, et nous écrirons

$$(4) \qquad \Theta(x_i) = \mathrm{S}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} m_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{i=p} \sum\limits_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}}.$$

On voit sur la série que la fonction ne change pas, quand on y remplace à la fois $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par $-x_1, -x_2, \ldots, -x_p$, ce qui revient à remplacer les nombres m_i par $-m_i$. On voit aussi que la fonction reprend la même valeur, quand on ajoute à l'une des variables la quantité $2\pi\sqrt{-1}$, sans changer les autres; car chaque terme de la série se reproduit.

Supposons que l'on ajoute aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ respectivement les quantités

$$2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{1k}, \quad 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{2k}, \quad \ldots, \quad 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{pk},$$

$n_1, n_2, \ldots, n_p$ étant des nombres entiers arbitraires; l'exposant du terme général de la série devient

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} m_i x_i + 2\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i n_k \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}.$$

Remarquons que l'on a identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}(m_i+n_i)(m_k+n_k)\alpha_{ik}=\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m_i m_k \alpha_{ik}+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}n_i n_k \alpha_{ik}$$
$$+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m_i\, n_k \alpha_{ik}+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m_k n_i \alpha_{ik},$$

et, comme les deux derniers termes sont égaux,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}(m_i+n_i)(m_k+n_k)\alpha_{ik}= &\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m_i m_k \alpha_{ik}+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}n_i n_k \alpha_{ik}\\ &+2\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m_i n_k \alpha_{ik}.\end{aligned}\right.$$

D'après cela, l'exposant (5) devient

$$\sum_{i=1}^{i=p}m_i x_i+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}(m_i+n_i)(m_k+n_k)\alpha_{ik}-\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}n_i n_k \alpha_{ik},$$

ou, en remplaçant les nombres m_i par m'_i-n_i,

$$\sum_{i=1}^{i=p}m'_i x_i+\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}m'_i m'_k \alpha_{ik}-\sum_{i=1}^{i=p}n_i x_i-\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p}n_i n_k \alpha_{ik}.$$

Les deux derniers termes de l'exposant, qui sont les mêmes dans tous les termes de la série, puisque les nombres n sont constants, donnent un facteur commun

$$e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i x_i-\sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} n_i n_k \alpha_{ik}},$$

et ce facteur est multiplié par la série

$$\mathrm{S}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} m'_i x_i+\sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} m'_i m'_k \alpha_{ik}},$$

qui est identique à la série (4), puisque les nombres m'_i varient, comme les nombres m_i, de $-\infty$ à $+\infty$. On obtient ainsi la relation

$$(7) \qquad \Theta\left(x_i + 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{ik}\right) = e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i x_i - \sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} n_i n_k \alpha_{ik}} \Theta(x_i).$$

En particulier, si l'on remplace les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par

$$x_1 + 2\alpha_{11}, \quad x_2 + 2\alpha_{21}, \quad \ldots, \quad x_p + 2\alpha_{p1},$$

il suffit de supposer, dans la formule générale, que le nombre n_1 est égal à 1, et que les autres nombres n sont nuls, et l'on a

$$(8) \qquad \Theta(x_i + 2\alpha_{i1}) = e^{-x_1 - \alpha_{11}} \Theta(x_i).$$

On a de même

$$(9) \qquad \Theta(x_i + 2\alpha_{i1} + 2\alpha_{i2}) = e^{-(x_1+x_2)-(\alpha_{11}+\alpha_{22}+2\alpha_{12})} \Theta(x_i).$$

70. Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_p$ des nombres entiers fixes, il est évident, à cause de la convergence, que la série (4) ne change pas, quand on y remplace les nombres variables m_i par les nombres $m_i - q_i$, et l'on a

$$\Theta(x_i) = \mathrm{S}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} (m_i - q_i) x_i + \sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} (m_i - q_i)(m_k - q_k)\alpha_{ik}};$$

on a d'ailleurs, en remplaçant les nombres m_i par $-m_i$,

$$\Theta(x_i) = \mathrm{S}\, e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=p} m_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}}.$$

En appelant A et B les deux exposants et prenant la demi-somme de ces deux quantités égales, on en déduit

$$\Theta(x_i) = \frac{1}{2}\mathrm{S}\,(e^{\mathrm{A}} + e^{\mathrm{B}}).$$

Ces deux exponentielles sont égales et de signes contraires, lorsque la différence des exposants est égale à un multiple impair de $\pi\sqrt{-1}$; cette différence étant égale à

$$A - B = \sum_{i=1}^{i=p} (2m_i - q_i)\left(x_i - \sum_{k=1}^{k=p} q_k \alpha_{ik}\right),$$

si l'on attribue aux variables des valeurs de la forme

$$(10) \qquad x_i = n_i \pi \sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} q_k \alpha_{ik},$$

il suffit, pour que cela ait lieu, que le nombre $\sum_{i=1}^{i=p} n_i q_i$ soit impair. On en conclut que toutes les valeurs des variables comprises dans la formule (10), dans laquelle $n_1, n_2, \ldots, n_p, q_1, q_2, \ldots, q_p$ sont des nombres entiers satisfaisant à la condition indiquée, annulent la fonction $\Theta(x_i)$.

Il résulte de ce qui précède que la fonction

$$(11) \qquad \frac{\Theta(x_i + a_i^{(1)})\,\Theta(x_i + a_i^{(2)})\ldots\Theta(x_i + a_i^{(n)})}{\Theta(x_i + b_i^{(1)})\,\Theta(x_i + b_i^{(2)})\ldots\Theta(x_i + b_i^{(n)})}$$

des p variables x_i, dans laquelle les $2np$ constantes a et b satisfont aux p relations

$$(12) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} a_i^{(h)} = \sum_{h=1}^{h=n} b_i^{(h)},$$

l'indice i variant de 1 à p, reprend la même valeur quand on ajoute à l'une des variables la quantité $2\pi\sqrt{-1}$, et aussi quand on leur ajoute simultanément les quantités

$$2\alpha_{1k}, \quad 2\alpha_{2k}, \quad \ldots, \quad 2\alpha_{pk},$$

k étant l'un quelconque des indices 1, 2, ..., p. C'est donc une fonc-

tion méromorphe admettant $2p$ systèmes de périodes conjuguées. Cette fonction présente le même caractère que les fonctions abéliennes, quand on met les équations différentielles abéliennes sous la forme normale (n° 60). Aussi nous verrons qu'il est possible d'exprimer les fonctions abéliennes à l'aide de fonctions analogues à la fonction (11), en choisissant convenablement les constantes.

CHAPITRE XI.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\Theta[u^{(i)}(x, y)]$.

71. D'après la remarque du n° **35**, les périodes normales de rangs pairs $2\alpha_{ik}$ des p intégrales normales de première espèce

$$(1) \qquad u^{(i)}(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx,$$

périodes données par des intégrales définies suivant des cycles convenablement choisis, satisfont à la condition nécessaire et suffisante, pour qu'avec ces constantes on puisse former une série convergente, définissant une fonction Θ de p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (n° **68**). Supposons que, dans cette fonction, on remplace les p variables x_i par les quantités $u^{(i)}(x, y) - G_i$, en désignant par G_i des constantes arbitraires et par $u^{(i)}(x, y)$ les p intégrales normales de première espèce, évaluées suivant un même chemin allant de l'origine (x_0, y_0) au point (x, y) et considérées comme des fonctions de la variable analytique (x, y); nous obtiendrons une nouvelle fonction

$$(2) \qquad \Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i] = \mathbf{S}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} m_i[u^{(i)}(x, y) - G_i] + \sum\limits_{i=1}^{i=p}\sum\limits_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}}$$

de cette variable, dont nous allons étudier les propriétés.

Si l'on change le chemin qui va de l'origine (x_0, y_0) au point (x, y), les intégrales $u^{(i)}(x, y)$ acquièrent, par l'addition des périodes, une infinité de valeurs comprises dans la formule

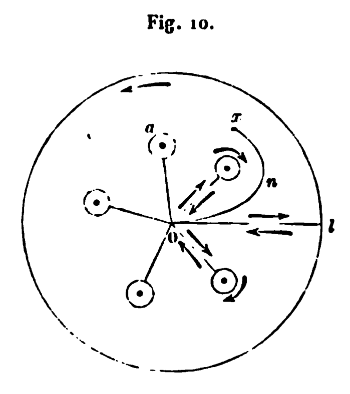
$$(3) \qquad u^{(i)} + 2 m_i \pi \sqrt{-1} + 2\sum_{h=1}^{h=p} n_h \alpha_{ih},$$

$u^{(i)}$ étant les valeurs relatives à un même chemin choisi à volonté, m_i et n_k désignant deux systèmes de p nombres entiers arbitraires. D'après la formule (7) du n° 69, la fonction $\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]$ acquiert au point (x,y) une infinité de valeurs égales à l'une d'elles multipliée par l'exponentielle

$$(4)\qquad e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i(u^{(i)}-G_i)-\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{k=1}^{k=p} n_i n_k \alpha_{ik}}.$$

72. Afin de rendre la fonction monotrope, considérons le contour simple formé par la droite Ol, la grande circonférence de centre O et la suite des lacets de première espèce relatifs aux points critiques (*fig.* 10). Désignons, comme nous l'avons fait au n° 25, par $u_0^{(i)}$ la va-

Fig. 10.



leur de l'intégrale $u^{(i)}$ fournie par un chemin Onx partant de l'origine (x_0, y_0) tangentiellement à la droite Ol, d'un côté ou de l'autre, et allant à un point x de la partie du plan enveloppée par le contour, sans franchir aucune partie de ce contour, et par $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$, ..., $u_{m-1}^{(i)}$ les valeurs fournies par ce même chemin, précédé des suites de lacets fondamentaux de seconde espèce qui conduisent de la racine initiale y_0 aux autres racines $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Chacune des intégrales abéliennes $u^{(i)}$ ayant ainsi m valeurs $u_h^{(i)}$, qui sont des fonctions holomorphes de x dans la partie du plan enveloppée par le contour, la fonction (2)

aura m valeurs

$$\Theta(u_0^{(i)} - G_i), \quad \Theta(u_1^{(i)} - G_i), \quad \ldots, \quad \Theta(u_{m-1}^{(i)} - G_i),$$

qui seront aussi des fonctions holomorphes de x dans la même étendue.

Nous avons vu au n° 25 que la différence $u_{\alpha_r}^{\prime(i)} - u_{\alpha_{r+1}}^{(i)}$ des valeurs de l'intégrale $u^{(i)}$ en deux points m' et m sur les bords opposés de la coupure Oa (*fig.* 7) est égale à la période $A_{\alpha_r}^{\prime(i)\alpha_{r+1}}$ de cette intégrale, relative au cycle simple formé de lacets fondamentaux de seconde espèce et du lacet binaire $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$. Le rapport

$$\frac{\Theta(u_{\alpha_r}^{\prime(i)} - G_i)}{\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i)} = \frac{\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i + A_{\alpha_r}^{\prime(i)\alpha_{r+1}})}{\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i)}$$

des valeurs correspondantes de la nouvelle fonction en ces mêmes points est égal à une exponentielle de la forme (4). On l'obtiendra en cherchant l'expression de la période $A_{\alpha_r}^{\prime\alpha_{r+1}}$ pour chacune des intégrales abéliennes.

Expression de la période $A_{\alpha_r}^{\prime\alpha_{r+1}}$.

73. Le nombre total des lacets binaires de seconde espèce, et par conséquent celui des périodes relatives aux cycles simples correspondants, est Σp. Nous avons remplacé ces périodes par les périodes

$$(5) \qquad A_{\alpha_1}^{\prime\alpha_0}, \quad A_{\alpha_2}^{\prime\alpha_0}, \quad \ldots, \quad A_{\alpha_{p-1}}^{\prime\alpha_0},$$

relatives aux lacets complexes (n° 20), dont le nombre est $\Sigma(p-1)$, ou $2p + 2(m-1)$. Nous avons désigné (n° 22) par ω_1', ω_2', ..., ω_{2p}' celles qui se rapportent aux lacets non fondamentaux de seconde espèce qui correspondent à des lacets non fondamentaux de première espèce, et nous avons posé (n° 23)

$$\omega_k^{\prime(i)} = \sum_{h=1}^{h=2p} c_{kh}\,\omega_h^{(i)}.$$

En remplaçant ensuite les périodes $\omega_h^{(i)}$ par leurs valeurs en fonction

formule (7). D'autre part, comme on a

$$A'^{\alpha_1}_{\alpha_0} + (A'^{\alpha_2}_{\alpha_1} + A'^{\alpha_3}_{\alpha_2} + \ldots + A'^{\alpha_p}_{\alpha_{p-1}}) = 0,$$

ou

$$A'^{\alpha_1}_{\alpha_0} + A'^{\alpha_0}_{\alpha_1} = 0, \quad A'^{\alpha_1}_{\alpha_0} = - A'^{\alpha_0}_{\alpha_1},$$

la même formule, dans laquelle on fait $r = 0$, en supposant $c''_{q_0,h} = 0$, donne aussi la valeur de la période $A'^{\alpha_1}_{\alpha_0}$, qui est égale et de signe contraire à celle de la période $A'^{\alpha_0}_{\alpha_1}$, telle qu'on la déduit de la formule (7). De cette manière, la formule (8) représente les périodes relatives aux p lacets binaires du système circulaire. Nous ferons en outre l'hypothèse générale $c''_{q_{r+p},h} = c''_{q_r,h}$, afin que les valeurs données par cette formule se reproduisent circulairement, quand on attribue à r des valeurs successives plus grandes que p.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(9) \qquad c''_{q_{r+1},2i-1} - c''_{q_r,2i-1} = m_i, \quad c''_{q_{r+1},2h} - c''_{q_r,2h} = n_h,$$

la formule (8) prend la forme

$$(10) \qquad A'^{(i)\alpha_{r+1}}_{\alpha_r} = 2 m_i \pi \sqrt{-1} + 2 \sum_{h=1}^{h=p} n_h \alpha_{ih}.$$

On en déduit

$$(11) \qquad \frac{\Theta(u^{(i)}_{\alpha_{r+1}} - G_i + A'^{(i)\alpha_{r+1}}_{\alpha_r})}{\Theta(u^{(i)}_{\alpha_{r+1}} - G_i)} = e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i (u^{(i)}_{\alpha_{r+1}} - G_i) - \sum\limits_{i=1}^{i=p} \sum\limits_{k=1}^{k=p} n_i n_k \alpha_{ik}},$$

et par suite

$$(12) \qquad d \log \frac{\Theta(u^{(i)}_{\alpha_{r+1}} - G_i + A'^{(i)\alpha_{r+1}}_{\alpha_r})}{\Theta(u^{(i)}_{\alpha_{r+1}} - G_i)} = -\sum_{i=1}^{i=p} n_i \, du^{(i)}_{\alpha_{r+1}}.$$

Théorème I.

74. *La fonction* $\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i]$ *admet* p *zéros.*

En chaque point x du plan, l'intégrale $u^{(i)}$ admet les m valeurs $u^{(i)}_h$, augmentées de multiples des périodes. Quand on établit les coupures, c'est-à-dire quand on astreint la variable à ne franchir aucune partie

du contour, on supprime les périodes; mais, d'après les propriétés de la fonction Θ, quand aux intégrales abéliennes on ajoute les périodes correspondantes, on multiplie la fonction par l'exponentielle (4), ce qui n'introduit aucun nouveau zéro. Il suffit donc de chercher le nombre des zéros des m fonctions holomorphes $\Theta(u_h^{(i)} - G_i)$, dans la partie du plan enveloppée par le contour. Le nombre de leurs zéros est donné par la formule de Cauchy

$$\mathfrak{N} \times 2\pi\sqrt{-1} = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int d\log\Theta(u_h^{(i)} - G_i), \tag{13}$$

l'intégration étant faite sur le contour entier dans le sens positif (1).

La partie de chacune des m intégrales qui se rapporte au circuit formé par la droite Ol et la grande circonférence étant nulle, il suffit de considérer les lacets relatifs aux points critiques. Les p lacets binaires relatifs à un même système circulaire entrent dans p intégrales et donnent la quantité

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a d\log\Theta(u_{\alpha_r}^{\prime(i)} - G_i) + \sum_{r=1}^{r=p} \int_a^0 d\log\Theta(u_{\alpha_r}^{(i)} - G_i),$$

et, à cause de la permutation circulaire,

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a d\log\Theta(u_{\alpha_r}^{\prime(i)} - G_i) - \sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a d\log\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i),$$

ou

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a d\log \frac{\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i + A_{\alpha_r}^{\prime(i)\alpha_{r+1}})}{\Theta(u_{\alpha_{r+1}}^{(i)} - G_i)}. \tag{14}$$

En vertu de la formule (12), cette quantité est égale à

$$-\sum_{i=1}^{i=p} \sum_{r=1}^{r=p} n_i \int_0^a du_{\alpha_{r+1}}^{(i)}. \tag{15}$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 198.

Il faut intégrer du point O au point a, sur le bord de droite de la coupure, avec la racine $y_{g_{r+1}}$, ce qui donne $I_{g_{r+1}}^{(i)}$ (n° **26**); ainsi la partie relative au lacet (a), pour un système circulaire, est

$$(16) \qquad -\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{r=1}^{r=p} n_i I_{g_{r+1}}^{(i)}.$$

75. Proposons-nous d'évaluer l'expression

$$\sum_{r=1}^{r=p} n_h I_{g_{r+1}}^{(i)},$$

dans laquelle les lettres h et i désignent deux indices fixes, égaux ou inférieurs à p. En remplaçant le coefficient n_h par sa valeur (9), on obtient

$$\sum_{r=1}^{r=p} n_h I_{g_{r+1}}^{(i)} = \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_{r+1},2h} I_{g_{r+1}}^{(i)} - \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r,2h} I_{g_{r+1}}^{(i)},$$

et, à cause de la permutation circulaire,

$$\sum_{r=1}^{r=p} n_h I_{g_{r+1}}^{(i)} = \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r,2h} I_{g_r}^{(i)} - \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r,2h} I_{g_{r+1}}^{(i)}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r,2h} (I_{g_r}^{(i)} - I_{g_{r+1}}^{(i)}) = \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r,2h} a_{g_r}^{(i)g_{r+1}}.$$

Si l'on désigne par $U_g^{(i)}$ la partie de l'intégrale $u^{(i)}$ relative à la suite des lacets fondamentaux de première espèce qui conduit de la racine initiale y_0 à la racine y_g, on a

$$A_{g_r}^{(i)g_{r+1}} = U_{g_r}^{(i)} + a_{g_r}^{(i)g_{r+1}} - U_{g_{r+1}}^{(i)},$$

d'où

$$a_{g_r}^{(i)g_{r+1}} = A_{g_r}^{(i)g_{r+1}} + U_{g_{r+1}}^{(i)} - U_{g_r}^{(i)},$$

et l'expression devient

$$\sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r, 2h} A^{(i) g_{r+1}}_{g_r} + \left[\sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r, 2h} U^{(i)}_{g_{r+1}} - \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r, 2h} U^{(i)}_{g_r} \right].$$

La seconde partie, à cause de la permutation circulaire, prend la forme

$$\sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_r, 2h} U^{(i)}_{g_{r+1}} - \sum_{r=1}^{r=p} c''_{q_{r+1}, 2h} U^{(i)}_{g_{r+1}} = - \sum_{r=1}^{r=p} n_h U^{(i)}_{g_{r+1}}.$$

Quant à la première partie, nous remarquons qu'il suffit d'y faire varier r de 1 à $p-1$, le terme suivant étant nul, puisque $c''_{q_p, 2h} = 0$. D'ailleurs, d'après la signification des indices $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$, la période de première espèce $A^{g_{r+1}}_{g_r}$, qui correspond à la période de seconde espèce $A'^{\alpha_0}_{\alpha_r}$ (n° 20) ou ω'_{q_r}, est celle qui est désignée par ω_{q_r}. On obtient ainsi la formule

$$(17) \qquad \sum_{r=1}^{r=p} n_h I^{(i)}_{g_{r+1}} = \sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r, 2h} \omega^{(i)}_{q_r} - \sum_{r=1}^{r=p} n_h U^{(i)}_{g_{r+1}}.$$

76. A l'aide de cette formule, dans laquelle on fait $h = i$, l'expression (16) devient

$$- \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r, 2i} \omega^{(i)}_{q_r} + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{r=1}^{r=p} n_i U^{(i)}_{g_{r+1}}.$$

Telle est la quantité fournie par le lacet (a) dans le second membre de l'équation (13). Si l'on fait la somme des quantités analogues fournies par les différents lacets, on a l'équation

$$(18) \qquad \mathfrak{N} \times 2\pi\sqrt{-1} = - \sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{S} \sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r, 2i} \omega^{(i)}_{q_r} + \sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{S} \sum_{r=1}^{r=p} n_i U^{(i)}_{g_{r+1}},$$

le nouveau signe somme s'étendant à tous les systèmes circulaires.

Le second membre se compose de deux parties que nous évaluerons

séparément. Pour évaluer la première partie, calculons la quantité

$$\mathrm{M}_i = -\,\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r,2i}\,\omega_{q_r}^{(i)}.$$

Le nombre total des termes qui la composent est $\Sigma(p-1)$ ou $2\mathrm{p}+2(m-1)$. Mais, dans la série complète des périodes, d'après les conventions faites au n° 73, les périodes ω_k sont nulles, lorsque le rang k de la période, qui est désigné ici par q_r, va de $2\mathrm{p}+1$ à $2\mathrm{p}+m-1$, et les coefficients c'' sont nuls, lorsque le rang va de $2\mathrm{p}+m$ à $2\mathrm{p}+2(m-1)$. Il ne reste donc, pour l'ensemble des lacets, que les $2\mathrm{p}$ termes qui correspondent aux valeurs de l'indice q_r allant de 1 et $2\mathrm{p}$, et l'on peut écrire

$$\mathrm{M}_i = -\sum_{k=1}^{k=2\mathrm{p}} c''_{k.2i}\,\omega_k^{(i)}.$$

Si l'on remplace $\omega_k^{(i)}$ par sa valeur (n° 33)

$$\omega_k^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}\,a_{k,2i-1} + 2\sum_{h=1}^{h=\mathrm{p}} a_{k,2h}\,\alpha_{ih},$$

on a

$$\mathrm{M}_i = -\,2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{k=2\mathrm{p}} c''_{k,2i}\,a_{k,2i-1} - 2\sum_{h=1}^{h=\mathrm{p}}\alpha_{ih}\sum_{k=1}^{k=2\mathrm{p}} c''_{k,2i}\,a_{k.2h},$$

et, en vertu de la formule (7) du n° 30,

$$\mathrm{M}_i = -\,2\pi\sqrt{-1}\,c'_{2i,2i-1} - 2\sum_{h=1}^{h=\mathrm{p}} c'_{2i.2h}\,\alpha_{ih}.$$

Mais on a choisi les périodes normales (n° 32), de manière que $c'_{2i.2i-1} = -1$ et $c'_{2i,2h} = 0$; l'expression se réduit donc à

$$\mathrm{M}_i = 2\pi\sqrt{-1}.$$

La première partie

$$\sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{M}_i,$$

se composant de cette quantité constante répétée p fois, est égale à $2\pi\sqrt{-1} \times p$.

77. Nous allons faire voir maintenant que la seconde partie est nulle. Comme nous l'avons dit au n° 27, la quantité $\mathrm{U}_{g_{r+1}}$ entre dans les parties relatives à tous les systèmes circulaires qui contiennent la racine $y_{g_{r+1}}$; dans chacun de ces systèmes, il y a un lacet binaire de première espèce, tel que $(a)_{g_r}^{g_{r+1}}$, qui conduit à cette racine; à ce lacet de première espèce correspond le lacet binaire de seconde espèce $(a')_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}}$; mais on sait que l'ensemble des lacets binaires de seconde espèce qui correspondent aux différents lacets de première espèce qui conduisent à la racine $y_{g_{r+1}}$ constituent le circuit de seconde espèce $(\mathrm{C}')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$; la somme des périodes correspondantes $\mathrm{A}'^{\alpha_{r+1}}_{\alpha_r}$ est nulle et l'on a, d'après la formule (10), pour chaque valeur de i,

$$2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{S}' m_i + 2\sum_{h=1}^{h=p} \alpha_{ih}\,\mathrm{S}' n_h = 0,$$

le signe somme, affecté d'un accent, s'étendant aux différents lacets binaires de seconde espèce qui entrent dans le circuit $(\mathrm{C}')_{g_{r+1}}^{g_{r+1}}$. Je dis que l'on a séparément, quelles que soient i et h,

$$\mathrm{S}' m_i = 0, \quad \mathrm{S}' n_h = 0;$$

autrement, il existerait entre les périodes de chaque intégrale $u^{(i)}$ une relation linéaire de la forme

$$2 m'_i \pi\sqrt{-1} + 2\sum_{h=1}^{h=p} n'_h \alpha_{ih} = 0,$$

dans laquelle les nombres entiers n'_h seraient indépendants de i, ce

qui est impossible (n° **36**). Il en résulte que le coefficient $S'n_i$ de la quantité $U^{(i)}_{g_{r+1}}$ est nul, et par conséquent que la seconde partie est identiquement nulle.

D'après cela, le second membre de l'équation (18) est égal à $2\pi\sqrt{-1}\times \mathrm{p}$; on en déduit $\mathfrak{N}=\mathrm{p}$. Ainsi la fonction $\theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]$ admet p zéros, en tenant compte du degré de multiplicité de chacun d'eux; en d'autres termes, il existe sur la sphère p points (x, y) où la fonction s'annule; la position de ces points dépend des valeurs attribuées aux p constantes G_i.

Étude de la fonction $\log\dfrac{\Theta(u^{(i)}-G'_i)}{\Theta(u^{(i)}-G_i)}$.

78. Chacune des deux fonctions $\theta(u^{(i)}-G_i)$, $\theta(u^{(i)}-G'_i)$ admet p zéros, qui sont en général des zéros simples ou du premier degré; nous désignerons par (x_k, y_k) ceux de la première, par (x'_k, y'_k) ceux de la seconde, l'indice k variant de 1 à p. Outre les points critiques algébriques, autour desquels elle acquiert un nombre fini de valeurs qui se permutent circulairement, la fonction

$$v=\log\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y)-G'_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]} \tag{19}$$

admet les points critiques logarithmiques (x_k, y_k) et (x'_k, y'_k), autour de chacun desquels elle prend une infinité de valeurs en progression arithmétique dont la raison est $2\pi\sqrt{-1}$. Quand on ajoute aux intégrales $u^{(i)}$ les périodes correspondantes

$$2m_i\pi\sqrt{-1}+2\sum_{h=1}^{h=\mathrm{p}} n_h\,\alpha_{ih},$$

les deux fonctions θ sont multipliées par des exponentielles de la forme (4) (n° **71**), qui ne diffèrent entre elles qu'en ce que G_i est remplacé par G'_i; leur quotient est donc multiplié par l'exponentielle

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=\mathrm{p}} n_i(G'_i-G_i)};$$

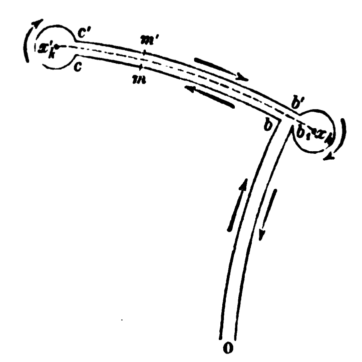
on en conclut que la fonction (19) acquiert au point (x, y) une infinité de valeurs comprises dans la formule

$$v + 2m'\pi\sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{i=p} n_i(G'_i - G_i),$$

v étant l'une d'elles, et $2m'\pi\sqrt{-1}$ un multiple de la période logarithmique $2\pi\sqrt{-1}$.

79. Pour rendre la fonction monotrope, nous introduirons de nouveaux lacets enveloppant les points logarithmiques. Concevons que les quantités G_i varient d'une manière continue jusqu'à devenir égales à G'_i; les zéros (x_k, y_k) de la fonction $\Theta(u^{(i)} - G_i)$ décriront des lignes continues et viendront occuper respectivement les positions (x'_k, y'_k). Nous supposerons l'étendue de cette variation assez restreinte, pour que les lignes $x_k x'_k$, décrites par les zéros, ne rencontrent pas les lacets relatifs aux points critiques algébriques, et ne se rencontrent pas entre elles. Nous envelopperons les points (x_k, y_k), (x'_k, y'_k), deux à deux, par des lacets semblables à ceux du nº 41 (*fig.* 11). Dans la

Fig. 11.



partie du plan enveloppée par le contour simple formé par le circuit et les deux sortes de lacets, chacune des intégrales $u^{(i)}$ ayant m valeurs $u_h^{(i)}$, qui sont des fonctions holomorphes de x, la fonction v a de même m valeurs v_h, qui sont aussi des fonctions holomorphes de x.

Quand la variable tourne autour du point x'_k ou autour du point x_k, de gauche à droite, l'une des fonctions v_h, celle qui correspond à la racine qui acquiert au point x_k la valeur y_k, et par conséquent au point x'_k la valeur y'_k, éprouve des accroissements égaux à $-2\pi\sqrt{-1}$ et à $+2\pi\sqrt{-1}$; elle reprend donc en b_1 la valeur qu'elle avait en b, et par suite en O, à la fin du lacet, celle qu'elle avait à l'entrée. Si l'on appelle v et v' les valeurs de cette fonction aux points m et m', sur les deux bords opposés de la coupure $x_k x'_k$, on a

$$v' - v = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Ce lacet est neutre pour les autres fonctions v.

80. Sur les deux bords opposés de la coupure Oa (*fig.* 7) du lacet (a), aux points m et m', on a (n° **25**)

$$v_{a_{r+1}} = \log \frac{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G'_i)}{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G_i)},$$

$$v'_{a_r} = \log \frac{\Theta(u'^{(i)}_{a_r} - G'_i)}{\Theta(u'^{(i)}_{a_r} - G_i)} = \log \frac{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G'_i + A'^{(i)a_{r+1}}_{a_r})}{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G_i + A'^{(i)a_{r+1}}_{a_r})},$$

d'où

$$v'_{a_r} - v_{a_{r+1}} = \log\left[\frac{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G'_i + A'^{(i)a_{r+1}}_{a_r})}{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G'_i)} : \frac{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G_i + A'^{(i)a_{r+1}}_{a_r})}{\Theta(u^{(i)}_{a_{r+1}} - G_i)}\right].$$

Si dans la formule (11) du n° **73** on remplace G_i par G'_i et que l'on divise ensuite membre à membre, on obtient l'expression de la quantité placée sous le signe logarithme, savoir

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i(G'_i - G_i)};$$

le logarithme lui-même est égal à la quantité

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} n_i(G'_i - G_i) + 2m'\pi\sqrt{-1},$$

m' étant un nombre entier. On démontrera, comme au n° **42**, que le

nombre entier m' est égal à zéro. Car cette quantité est la variation de la fonction v sur un cycle situé dans la partie du plan enveloppée par le contour; si l'on pose

$$\frac{\Theta(u^{(i)}-G'_i)}{\Theta(u^{(i)}-G_i)}=1+\varepsilon f(x,y),$$

ε étant un nombre positif très-petit, on peut rendre les différences G'_i-G_i assez petites pour que le module de la fonction $f(x,y)$ soit inférieur à l'unité tout le long du cycle. Quand le point (x,y) décrit un cycle, le point f décrit une ligne d'une longueur finie l et la variation de la fonction v, ou l'intégrale définie

$$\varepsilon\int\frac{df}{1+\varepsilon f},$$

a un module moindre que la quantité très-petite $\frac{\varepsilon l}{1-\varepsilon}$. La quantité (20) devant être très-petite, on en conclut que le nombre entier m' est égal à zéro. En allant ainsi de proche en proche, on obtient la formule

(21) $$v'_{a_r}-v_{a_{r+1}}=\sum_{i=1}^{i=p}n_i(G'_i-G_i).$$

THÉORÈME II.

81. *Les* p *zéros de la fonction* $\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]$ *satisfont aux relations*

$$\sum_{k=1}^{k=p}u^{(i)}(x_k,y_k)-G_i\equiv C_i,$$

dans lesquelles les quantités C_i *sont indépendantes des arbitraires* G_i.

Soit $u^{(j)}(x,y)$ l'intégrale abélienne normale qui correspond à un indice déterminé j. Les m fonctions $v_h\frac{du_h^{(j)}}{dx}$ étant holomorphes dans la partie du plan enveloppée par le contour simple formé par le circuit

et l'ensemble de tous les lacets, chacune des intégrales

$$\int v_h \frac{du_h^{(j)}}{dx} dx, \quad \text{ou} \quad \int v_h du_h^{(j)},$$

prise sur le contour entier, est égale à zéro, et par conséquent leur somme

$$(22) \qquad \sum_{h=0}^{h=m-1} \int v_h du_h^{(j)}$$

est aussi égale à zéro.

La partie de chacune des intégrales relatives au circuit étant nulle, il suffit de considérer les lacets. Le lacet $(x_k x'_k)$ n'entre que dans une intégrale, celle où y acquiert au point x_k la valeur y_k; les deux bords de la coupure $0b$ donnant des quantités égales et de signes contraires et les petits cercles des quantités infiniment petites, on a, pour ce lacet,

$$\int_{x_k}^{x'_k} v\, du^{(j)} + \int_{x'_k}^{x_k} v'\, du^{(j)} = \int_{x_k}^{x'_k} (v - v')\, du^{(j)} = 2\pi\sqrt{-1} \int_{x_k}^{x'_k} du^{(j)}$$
$$= 2\pi\sqrt{-1}\,[u^{(j)}(x'_k, y'_k) - u^{(j)}(x_k, y_k)],$$

la quantité placée entre parenthèses désignant la variation qu'éprouve la fonction $u^{(j)}$, quand la variable (x, y) va du point (x_k, y_k) au point (x'_k, y'_k), en suivant la ligne $x_k x'_k$. Les p lacets $(x_k x'_k)$ donnent ainsi la quantité

$$(23) \qquad 2\pi\sqrt{-1} \sum_{k=1}^{k=p} [u^{(j)}(x'_k, y'_k) - u^{(j)}(x_k, y_k)].$$

Le lacet (a) entre dans p intégrales et donne la quantité

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a v'_{\alpha_r} du_{\alpha_r}^{(j)} - \sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a v_{\alpha_{r+1}} du_{\alpha_{r+1}}^{(j)} = \sum_{r=1}^{r=p} \int_0^a (v'_{\alpha_r} - v_{\alpha_{r+1}})\, du_{\alpha_{r+1}}^{(j)},$$

qui, d'après la formule (21), est égale à

$$(24)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\sum_{r=1}^{r=p} n_i \int_0^a du^{(j)}_{\alpha_{r+1}} = \sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\sum_{r=1}^{r=p} n_i I^{(j)}_{g_{r+1}},$$

et devient ensuite

$$\sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r,2i}\,\omega^{(j)}_{q_r} - \sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\sum_{r=1}^{r=p} n_i U^{(j)}_{g_{r+1}},$$

en vertu de la formule (17) du n° 75, dans laquelle on remplace l'indice i par j, et le nombre variable h par i.

Pour l'ensemble des lacets relatifs aux points critiques, on aura donc la quantité

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\,\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r,2i}\,\omega^{(j)}_{q_r} - \sum_{i=1}^{i=p}(G'_i - G_i)\,\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p} n_i U^{(j)}_{g_{r+1}}.$$

82. D'après ce que nous avons dit au n° **77**, la seconde partie est identiquement nulle. Quant à la première partie, si l'on pose

$$N_i = -\,\mathrm{S}\sum_{r=1}^{r=p-1} c''_{q_r,2i}\,\omega^{(j)}_{q_r},$$

on a, comme au n° **76**,

$$N_i = -\sum_{k=1}^{k=2p} c''_{k,2i}\,\omega^{(j)}_k,$$

et, en remplaçant $\omega^{(j)}_k$ par sa valeur

$$\omega^{(j)}_k = 2\pi\sqrt{-1}\,a_{k,2j-1} + 2\sum_{h=1}^{h=p} a_{k,2h}\,\alpha_{jh},$$

$$N_i = -2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{k=2p} c''_{k,2i}\,a_{k,2j-1} - 2\sum_{h=1}^{h=p}\alpha_{jh}\sum_{k=1}^{k=2p} c''_{k,2i}\,a_{k,2h},$$

$$N_i = -2\pi\sqrt{-1}\,c'_{2i,2j-1} - 2\sum_{h=1}^{h=p} c'_{2i,2h}\,\alpha_{jh} = -2\pi\sqrt{-1}\,c'_{2i,2j-1}.$$

L'expression (25) est donc égale à

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{i=p} c'_{2i,2j-1}(G'_i - G_i).$$

Mais, quand i varie de 1 à p, le coefficient $c'_{2i,2j-1}$ est nul, excepté pour $i=j$; cette expression se réduit ainsi au seul terme

$$(26) \qquad -2\pi\sqrt{-1}(G'_j - G_j).$$

Il résulte de là que la somme des m intégrales (22) se compose des deux quantités (23) et (26), et l'on a l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p}[u^{(j)}(x'_k, y'_k) - u^{(j)}(x_k, y_k)] - (G'_j - G_j) = 0,$$

ou

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(j)}(x'_k, y'_k) - G'_j = \sum_{k=1}^{k=p} u^{(j)}(x_k, y_k) - G_j.$$

L'indice j étant quelconque, on en conclut que les p quantités

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - G_i,$$

conservent des valeurs constantes C_i, quand, les quantités G_i variant d'une manière continue, on prend les valeurs continues des intégrales sur les lignes décrites par les zéros. Ce théorème est indépendant de la restriction apportée à l'étendue de la variation des arbitraires G_i; car, en supprimant les coupures, on rétablit la continuité (n° 44).

En évaluant les intégrales $u^{(i)}(x_k, y_k)$ par différents chemins, on ajoute aux constantes C_i des multiples des périodes. On écrira donc d'une manière générale

$$(27) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i.$$

sont nuls; car on a

$$\omega'^{(i)}_{2p+1} = \Omega^{(i)}_{2p-1}, \quad \omega'^{(i)}_{2p+2} = 0.$$

Ces périodes ω' sont celles qui sont désignées par $A'^{a_0}_{a_1}$; les secondes périodes $A'^{a_1}_{a_0}$ sont égales aux premières et de signes contraires; on obtient ainsi immédiatement la formule (10) du n° **73**, où l'on supposera que les coefficients $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ sont nuls et que les suivants n_k, $n_{k+1}, \ldots, n_p$ sont égaux à ± 1. L'expression (16) du n° **74** est composée de deux termes égaux; car leurs coefficients n sont égaux et de signes contraires, ainsi que les deux intégrales I; elle est donc égale à

$$-2\sum_{i=k}^{i=p} n_i I^{(i)}_{g_0},$$

en désignant par n_i les coefficients qui se rapportent à $r=1$. Si l'on se rappelle que pour chaque point critique on a désigné par y_{g_1} la racine y_0 (n° **37**), on trouve que la partie relative aux deux points critiques consécutifs a_{2k-1} et a_{2k} est égale à

$$\sum_{i=k}^{i=p} (\mathcal{A}^{(i)}_{2k-1} - \mathcal{A}^{(i)}_{2k}) = \sum_{i=k}^{i=p} (\Omega^{(i)}_{2k-1} - \Omega^{(i)}_{2k-3}) = 2\pi\sqrt{-1};$$

car, lorsque i varie de k à p, toutes les périodes $\Omega^{(i)}_{2k-3}$ sont nulles, et aussi toutes les périodes $\Omega^{(i)}_{2k-1}$, excepté la période $\Omega^{(k)}_{2k-1}$, qui correspond à $i=k$ et qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$. Chaque couple de points critiques donnant la même quantité $2\pi\sqrt{-1}$, excepté les deux derniers qui donnent zéro, on a pour l'ensemble $2\pi\sqrt{-1}\times p$; d'où l'on conclut $\mathfrak{N} = p$.

85. La démonstration du second théorème se simplifie de la même manière. L'expression (24) du n° **81** devient

$$2\sum_{i=k}^{i=p} (G'_i - G_i)\, n_i I^{(j)}_{g_0}.$$

Les deux points critiques consécutifs a_{2k-1} et a_{2k} donnent

$$-(\mathcal{A}_{2k-1}^{(j)} - \mathcal{A}_{2k}^{(j)}) \sum_{i=k}^{i=p} (G'_i - G_i) = -(\Omega_{2k-1}^{(j)} - \Omega_{2k-3}^{(j)}) \sum_{i=k}^{i=p} (G'_i - G_i).$$

Les deux derniers points critiques donnant des termes nuls, on a, pour l'ensemble des points critiques,

$$-\sum_{k=1}^{k=p} \left[(\Omega_{2k-1}^{(j)} - \Omega_{2k-3}^{(j)}) \sum_{i=k}^{i=p} (G'_i - G_i) \right].$$

La période $\Omega_{2k-1}^{(j)}$ étant nulle pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k=j$, et la période $\Omega_{2k-3}^{(j)}$ étant aussi nulle pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k=j+1$, cette expression se réduit à

$$-2\pi\sqrt{-1} \left[\sum_{i=j}^{i=p} (G'_i - G_i) - \sum_{i=j+1}^{i=p} (G'_i - G_i) \right] = -2\pi\sqrt{-1}\,(G'_j - G_j).$$

86. Dans le cas particulier dont nous nous occupons maintenant, on peut trouver les p zéros de la fonction $\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i)]$, lorsqu'on attribue aux arbitraires G_i des valeurs égales à celles que prennent les intégrales ultra-elliptiques $u^{(i)}(x, y)$ en un même point critique. Remarquons d'abord que les formules (9) du n° 39 deviennent

$$(31) \quad \begin{cases} \omega_{2k-1}^{(i)} = -\Omega_{2k-3}^{(i)} + \Omega_{2p-1}^{(i)} + 2\sum_{h=k}^{h=p} \alpha_{ih}, \\ \omega_{2k}^{(i)} \quad = -\Omega_{2k-1}^{(i)} + \Omega_{2p-1}^{(i)} + 2\sum_{h=k}^{h=p} \alpha_{ih}. \end{cases}$$

On complétera la suite des périodes en attribuant à k les deux valeurs $p+1$ et $p+2$, et faisant les mêmes conventions qu'au n° **84**; car on a

$$\omega_{2p+1}^{(i)} = 0, \quad \omega_{2p+2}^{(i)} = \Omega_{2p-1}^{(i)}.$$

Donnons aux arbitraires G_i des valeurs égales à celles des inté-

grales $u^{(i)}$ au point critique a_{2k}; lorsque le point variable (x, y) vient coïncider avec un autre point critique $a_{2k'}$, à indice pair, on a, abstraction faite des multiples des périodes,

$$u^{(i)} - G_i = \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_{2k'}^{(i)} - \mathcal{A}_{2k}^{(i)}) = \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_{2k'}^{(i)} - \mathcal{A}_{2p+1}^{(i)}) - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_{2k}^{(i)} - \mathcal{A}_{2p+1}^{(i)})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\omega_{2k'}^{(i)} - \omega_{2k}^{(i)}) = \tfrac{1}{2}\Omega_{2k-1}^{(i)} - \tfrac{1}{2}\Omega_{2k'-1}^{(i)} + \sum_{h=k'}^{h=k-1} \alpha_{ih},$$

si k' est plus petit que k. Cette quantité est de la forme

$$m_i\pi\sqrt{-1} + \sum_{h=1}^{h=p} n_h \alpha_{ih}.$$

Les nombres entiers m_i sont nuls, excepté $m_{k'} = -1$ et $m_k = 1$; les nombres entiers n_h sont aussi nuls, excepté ceux qui correspondent aux valeurs de h allant de k' à $k-1$ inclusivement et qui sont égaux à 1; la somme $\sum_{i=1}^{i=p} m_i n_i$ se réduit donc au terme qui correspond à $i = k'$, et est égale à -1. Mais on sait (n° 70) que, quand cette somme est un nombre impair, la fonction $\Theta(x_i)$ est nulle. On en conclut que la fonction proposée s'annule en tous les points critiques à indices pairs, excepté au point a_{2k}.

En attribuant aux arbitraires G_i des valeurs égales à celles des intégrales $u^{(i)}$ au point critique a_{2k-1}, on démontrerait de même que la fonction s'annule en tous les autres points critiques à indices impairs ([1]).

Chacun de ces zéros est du degré $\frac{1}{2}$; mais, comme les deux branches $\Theta(u_0^{(i)} - G_i)$, $\Theta(u_1^{(i)} - G_i)$ de la fonction s'annulent en même temps, on le regardera comme étant un zéro du premier degré.

Cette connaissance des zéros de la fonction pour certaines valeurs particulières des arbitraires G_i nous permet de trouver immédiatement les valeurs des constantes fondamentales C_i. Si l'on fait, par exemple, $G_i = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2p+1}^{(i)}$, les zéros de la fonction coïncident avec les points cri-

---

([1]) Cette propriété particulière des intégrales ultra-elliptiques est due à M. Neumann (*Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, 1865).

tiques a_1, a_3, ..., a_{2p-1}, et l'on a

$$(32) \qquad C_i = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=p} \mathcal{A}_{2h-1}^{(i)} - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2p+1}^{(i)}.$$

Plus généralement, en faisant $G_i = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2k-1}^{(i)}$ ou $G_i = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2k}^{(i)}$, et posant

$$H_i = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=p+1} \mathcal{A}_{2h-1}^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=p+1} \mathcal{A}_{2h}^{(i)},$$

on a

$$(33) \qquad C_i \equiv H_i - \mathcal{A}_{2k-1}^{(i)} \equiv H_i - \mathcal{A}_{2k}^{(i)}.$$

CHAPITRE XII.

SUITE DES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\Theta[u^{(i)}(x,y)]$.

Revenons maintenant à l'étude de la fonction $\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]$, dans le cas général des intégrales abéliennes. Nous avons démontré que cette fonction admet p zéros, et que ces p zéros, que nous avons désignés par (x_k, y_k), satisfont aux relations

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i, \tag{1}$$

dans lesquelles les constantes C_i sont indépendantes des arbitraires G_i. Ces p constantes fondamentales C_i dépendent uniquement des coefficients de l'équation algébrique proposée $F(x,y)=0$, et du point (x_0, y_0) choisi comme point initial des intégrales abéliennes; elles admettent un seul système de valeurs, augmentées de multiples des périodes correspondantes.

Théorème III.

87. *On peut déterminer les* p *quantités* G_i *de manière que la fonction* $\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i]$ *admette* p *zéros donnés* (x_k, y_k).

Il est nécessaire d'abord que les arbitraires G_i satisfassent aux relations (1); on en déduit pour ces quantités un seul système de valeurs

$$G_i = \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - C_i, \tag{2}$$

augmentées de multiples des périodes. Les fonctions

$$\Theta[u^{(i)}(x,y)-G_i],$$

qui se rapportent à ces différents systèmes de valeurs des quantités G_i, étant égales à une même fonction, multipliée par une exponentielle de la forme (4) (n° 71), admettent les mêmes zéros. Mais ces p zéros satisfont aussi aux relations (1), et, par conséquent, aux relations

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) = G_i + C_i,$$

qui ont la forme des équations (23) du n° 60, dans lesquelles on attribue aux variables u_i les valeurs $G_i + C_i$; or nous avons vu qu'à un système de valeurs attribuées aux variables u_i correspond un seul système de points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_p, y_p); on en conclut que les p zéros de la fonction considérée coïncident avec les p zéros donnés.

Si l'on remplace les quantités G_i par leurs valeurs, la fonction cherchée se met sous la forme

$$(4) \qquad \Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right],$$

abstraction faite du facteur exponentiel.

THÉORÈME IV.

88. *La fonction*

$$(5) \qquad \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - C_i\right]$$

de p − 1 *variables indépendantes* (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{p-1}, y_{p-1}) *est identiquement nulle.*

Nous avons formé une fonction

$$(4) \qquad \Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]$$

admettant p zéros (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_p, y_p), donnés arbitrairement.

Elle s'annule quand le point variable (x, y) coïncide avec l'un d'eux, par exemple avec le point (x_p, y_p); on a donc

$$\Theta\left[-\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right] = \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - C_i\right] = 0,$$

quels que soient les $p-1$ autres points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$.

89. *Corollaire.* — Pour qu'une fonction, telle que

$$(6) \qquad \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - C'_i\right],$$

de $p-1$ points arbitraires, soit identiquement nulle, il est nécessaire que les constantes C'_i soient égales aux constantes C_i, ou n'en diffèrent que des mêmes multiples des périodes correspondantes. Prenons, en effet, un autre point (x_p, y_p) arbitraire et différent des premiers. D'après l'hypothèse, la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + C'_i\right]$$

de la variable (x, y) admet les p zéros $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$; car elle s'annule lorsque le point variable coïncide avec l'un quelconque d'entre eux. Si l'on pose

$$G_i = \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - C'_i,$$

cette fonction devient

$$\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i].$$

En vertu du théorème II, ses p zéros satisfont aux relations

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i;$$

en remplaçant les quantités G_i par leurs valeurs, on en déduit

$$C'_i \equiv C_i.$$

Théorème V.

90. *La somme des valeurs d'une intégrale abélienne normale* $u^{(i)}(x, y)$ *aux points d'intersection de la courbe* $F = 0$ *et d'une courbe variable du degré* $m - 3$, *satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, est équivalente à la quantité constante* $2C_i$.

Nous savons (nº 14) qu'une courbe $Q = 0$ du degré $m - 3$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, coupe la courbe $F = 0$ en $2p - 2$ points; nous désignerons par (x_k, y_k) les $p - 1$ premiers, que l'on peut prendre à volonté, et les $p - 1$ autres par (x'_k, y'_k), l'indice k variant de 1 à $p - 1$. D'après le théorème d'Abel (nº 45), la somme

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k)$$

conserve une valeur constante K_i, quand la courbe $Q = 0$ varie d'une manière continue, tout en satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques. On en déduit

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) = K_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

d'où

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) - C_i\right] = \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - (K_i - C_i)\right].$$

D'après le théorème IV, quels que soient les $p-1$ points (x'_k, y'_k) et par suite les $p-1$ points (x_k, y_k), la première fonction est nulle; donc la seconde est aussi nulle. On en conclut, en vertu du corollaire précédent, que les constantes $K_i - C_i$ sont égales aux constantes C_i, ou n'en diffèrent que des mêmes multiples des périodes correspondantes. On a ainsi

$$(7)\qquad K_i \equiv 2C_i,$$

et par suite

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) \equiv 2C_i.$$

91. *Corollaire I.* — Nous avons dit (n° **83**) que, lorsque les arbitraires G_i ont des valeurs quelconques, la fonction $\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i]$ admet p zéros qui coïncident avec les p points (x_k, y_k) qui constituent les fonctions intégrales des équations abéliennes

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) = G_i + C_i.$$

Il y a indétermination (n° **60**) lorsqu'on attribue à ces quantités des valeurs de la forme

$$(9)\qquad G_i \equiv C_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k).$$

Dans ce cas, la fonction proposée devient

$$(10)\qquad \Theta\left[u^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) - C_i\right],$$

abstraction faite d'un facteur exponentiel; en vertu du théorème IV, elle est identiquement nulle.

D'après le théorème III, la fonction $\Theta[u^{(i)}(x, y) - G_i]$ est déterminée par ses p zéros, abstraction faite d'un facteur exponentiel; cette

fonction est

$$(4) \qquad \Theta\left[u^{(i)}(x, y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right].$$

Supposons que les p zéros donnés (x_k, y_k) soient situés sur une courbe $Q = 0$ du degré $m - 3$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques; si l'on appelle (α_k, β_k) les $p - 2$ autres points d'intersection, on a

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) \equiv 2C_i,$$

et la fonction prend la forme (10); elle est identiquement nulle. Ce cas se ramène d'ailleurs au précédent; car supposer que les p points (x_k, y_k) sont situés sur une courbe $Q = 0$ du degré $m - 3$ revient, d'après les équations (2), à attribuer aux quantités G_i des valeurs de la forme (9).

92. *Corollaire II.* — Le théorème précédent permet de déterminer le système des constantes $2C_i$. On cherchera les points d'intersection de la courbe $F = 0$ avec une courbe $Q = 0$ du degré $m - 3$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, et l'on calculera les valeurs de chacune des intégrales abéliennes en ces points; en désignant par K_i la somme de ces valeurs, on aura $2C_i \equiv K_i$. Les constantes C_i elles-mêmes seront de la forme

$$(11) \qquad C_i = \frac{K_i}{2} + m_i\pi\sqrt{-1} + \sum_{h=1}^{h=p} n_h \alpha_{ih},$$

m_i et n_h étant des nombres entiers qu'il reste à déterminer.

Supposons que la courbe $Q = 0$ soit tangente à la courbe $F = 0$ en $p - 1$ points, que nous désignerons par (x_k, y_k); si l'on représente par K_i la somme

$$2\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

la quantité

$$\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=p-1} u^{(i)}(x_h, y_h) - C_i\right] = \Theta\left(\frac{K_i}{2} - C_i\right)$$

étant nulle, il en résulte que les nombres entiers m_i et n_h doivent satisfaire à la condition

$$(12) \qquad \Theta\left(m_i \pi\sqrt{-1} + \sum_{h=1}^{h=p} n_h \alpha_{ih}\right) = 0.$$

Cette condition est satisfaite, lorsque la somme $\sum_{i=1}^{i=p} m_i n_i$ est un nombre impair (n° **70**).

Dans le cas des intégrales ultra-elliptiques, la ligne $Q = 0$, tangente à la courbe $F = 0$ en $p - 1$ points, se compose de $p - 1$ droites passant chacune par un point critique. Si ces droites passent par les $p - 1$ points critiques à indices impairs, excepté a_1 et a_3, on a

$$K_i = \sum_{h=1}^{h=p+1} \mathcal{A}_{2h-1}^{(i)} - \mathcal{A}_1^{(i)} - \mathcal{A}_3^{(i)}.$$

Nous avons trouvé (n° **86**)

$$C_i = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=p+1} \mathcal{A}_{2h-1}^{(i)} - \mathcal{A}_1^{(i)}.$$

La différence

$$\frac{K_i}{2} - C_i = \tfrac{1}{2}\Omega_1^{(i)} + \tfrac{1}{2}\Omega_2^{(i)},$$

est de la forme $m_i\pi\sqrt{-1} + \alpha_{i1}$, les nombres entiers m_i étant nuls, excepté $m_1 = 1$, et la condition (12) est satisfaite.

THÉORÈME VI.

93. *La fonction*

$$\Theta\left[u^{(i)}(x,y)+\sum_{k=1}^{k=p-1}u^{(i)}(x_k,y_k)-u^{(i)}(\xi,\eta)-C_i\right] \tag{13}$$

admet le zéro (ξ, η) *et* p — 1 *autres zéros indépendants du premier.*

Dans la composition de cette fonction entrent p points donnés arbitrairement, savoir le point (ξ, η) et les p — 1 points (x_k, y_k). Considérons la courbe $Q = 0$, du degré $m - 3$, qui satisfait aux conditions relatives aux points critiques et passe par les p — 1 points (x_k, y_k); elle coupe la courbe $F = 0$ en p — 1 autres points (x'_k, y'_k). De l'équation (8) on déduit

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}u^{(i)}(x_k,y_k)\equiv 2C_i-\sum_{k=1}^{k=p-1}u^{(i)}(x'_k,y'_k),$$

et la fonction (13) devient, à part un facteur exponentiel,

$$\Theta\left[u^{(i)}(x,y)-\sum_{k=1}^{k=p-1}u^{(i)}(x'_k,y'_k)-u^{(i)}(\xi,\eta)+C_i\right].$$

D'après la formule (4) du n° 87, les p zéros de cette fonction sont le point (ξ, η) et les p — 1 points (x'_k, y'_k). La position de ces p — 1 points (x'_k, y'_k) est indépendante du point (ξ, η); elle dépend uniquement des p — 1 points donnés (x_k, y_k).

Dans le cas des intégrales ultra-elliptiques, la ligne $Q = 0$ se composant de p — 1 droites de la forme $x - x_k = 0$ (n° 61), et passant par les p — 1 points donnés (x_k, y_k), les p — 1 autres points d'intersection (x'_k, y'_k) sont les points $(x_k, -y_k)$, symétriques des premiers.

94. *Corollaire.* — Si, dans la composition de la fonction (13), on remplace le point fixe (ξ, η) par un autre point fixe (ξ', η'), sans

changer les $p-1$ points (x_k, y_k), on forme une seconde fonction admettant le zéro (ξ', η') et $p-1$ autres zéros qui sont les mêmes que ceux de la première. Les deux fonctions ayant $p-1$ zéros communs, leur rapport

$$(14)\quad \varpi(x,y) = \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi', \eta') - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi, \eta) - C_i\right]}$$

est une fonction de la variable (x, y), admettant un seul zéro (ξ', η') et un seul infini (ξ_k, η_k). Cette fonction acquiert en chaque point (x, y) une infinité de valeurs égales à l'une d'elles multipliée par l'exponentielle (n° 78)

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i [u^{(i)}(\xi', \eta') - u^{(i)}(\xi, \eta)]}.$$

THÉORÈME VII.

95. *Étant données deux courbes* $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$, *du degré* n, *si l'on désigne par* (ξ_h, η_h) *les* mn *points d'intersection de la première et de la courbe proposée* $F(x,y)=0$, *par* (ξ'_h, η'_h) *les points d'intersection de la seconde et de la même courbe* $F=0$, *si, de plus,* $u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ *sont les valeurs qu'acquièrent les intégrales abéliennes* $u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$, *quand on passe de la première courbe à la seconde par une variation continue, la fonction*

$$(15)\qquad W = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]}$$

est égale à une fonction rationnelle des p *points* (x_k, y_k).

L'indice h variant de 1 à mn, la fonction W est le produit des

mn fonctions

$$w_h = \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]},$$

que l'on obtient en faisant varier l'indice h de 1 à mn. Si l'on y regarde le point (x_1, y_1) comme seul variable, cette dernière fonction, que l'on peut écrire

$$(16)\quad w_h(x_1, y_1) = \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x_1, y_1) + \sum_{k=2}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x_1, y_1) + \sum_{k=2}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]},$$

a la même forme que la fonction $w(x, y)$ étudiée au numéro précédent. Elle admet le seul zéro (ξ'_h, η'_h), le seul infini (ξ_h, η_h), et, quand on fait varier le chemin qui va de l'origine (x_0, y_0) au point (x_1, y_1), c'est-à-dire quand on ajoute aux intégrales abéliennes $u^{(i)}(x_1, y_1)$ les périodes correspondantes

$$2 m_i \pi \sqrt{-1} + 2 \sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{ik},$$

elle est multipliée par l'exponentielle

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i [u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)]}.$$

Il en résulte que la fonction W de la variable (x_1, y_1) admet les mn zéros (ξ'_h, η'_h), les mn infinis (ξ_h, η_h), et que, par l'addition des périodes, elle est multipliée par l'exponentielle

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{h=1}^{h=mn} [u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)]}.$$

Mais, en vertu du théorème d'Abel (n° 44), on a

$$(17) \qquad \sum_{h=1}^{h=mn} [u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)] = 0.$$

Cette dernière exponentielle est donc égale à l'unité, et la fonction W reprend la même valeur au point (x_1, y_1), quel que soit le chemin suivi pour y arriver.

A une valeur de la variable x_1 correspondent m valeurs de y_1, et, par conséquent, en vertu de ce qui précède, m valeurs de W. Ces m branches de la fonction W sont holomorphes dans le voisinage de chacune des valeurs de x_1, excepté dans le voisinage de certains points singuliers. Ces points singuliers sont de deux sortes. Les uns sont les points critiques de la fonction algébrique y_1 de x_1, définie par l'équation proposée $F(x_1, y_1) = 0$; lorsque plusieurs racines y_1 se permutent autour de l'un de ces points, les valeurs correspondantes de la fonction W sont infiniment peu différentes d'une même valeur limite et se permutent suivant la même loi; ces points sont donc aussi des points critiques algébriques de la fonction W. Les autres sont les mn points $x_1 = \xi_h$; au point ξ_h, une branche de la fonction W, celle qui correspond à la racine $y_1 = \eta_h$, devient infinie, mais de telle sorte que la fonction $\frac{1}{W}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point; le point ξ_h est donc un pôle de cette branche de la fonction. Ce sont là les seuls points singuliers de la fonction W. Ainsi, sur toute la surface de la sphère sur laquelle on figure le mouvement de la variable x_1, la fonction W admet un nombre fini m de valeurs en chaque point, et n'a pas de points singuliers autres que des *points singuliers algébriques*, c'est-à-dire des pôles et des points critiques algébriques. Or, nous avons démontré, M. Bouquet et moi, qu'une fonction jouissant de ces propriétés est une fonction algébrique (1). On conclut de ce théorème que W est une fonction algébrique de x_1, c'est-à-dire qu'elle est liée à la variable x_1 par une équation algébrique et entière, du degré m

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 216.

par rapport à W. On peut même ajouter, d'après un autre théorème (Note B), qu'elle est égale à une fonction rationnelle de x_1 et y_1.

La fonction rationnelle

$$\frac{\psi(x_1, y_1)}{\varphi(x_1, y_1)}$$

admet les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction W, savoir les points d'intersection de la courbe $F(x_1, y_1) = 0$ avec la courbe $\psi(x_1, y_1) = 0$ ou avec la courbe $\varphi(x_1, y_1) = 0$. Le rapport de la fonction W à cette fonction rationnelle conserve donc une valeur finie sur toute la sphère; on en conclut que ce rapport est constant, c'est-à-dire indépendant de la variable x_1; car, s'il n'était pas constant, ce rapport, admettant m valeurs pour chaque valeur de x_1 et n'ayant pas de points singuliers autres que des points critiques algébriques, serait lui-même une fonction algébrique de x_1; toute fonction entière et symétrique de ces m valeurs, étant une fonction holomorphe de x_1 sur toute la sphère, serait constante ([1]); le rapport, satisfaisant à une équation algébrique du degré m, à coefficients constants, serait lui-même constant. Ainsi la valeur du rapport est indépendante de la variable x_1. On arrive à la même conclusion en considérant la fonction rationnelle

$$(18) \qquad \frac{\psi(x_1, y_1)}{\varphi(x_1, y_1)} \times \frac{\psi(x_2, y_2)}{\varphi(x_2, y_2)} \times \cdots \times \frac{\psi(x_p, y_p)}{\varphi(x_p, y_p)},$$

qui est égale à la précédente multipliée par un facteur indépendant de x_1.

Si l'on regarde maintenant le point (x_2, y_2) comme seul variable, le même raisonnement apprend que le rapport de la fonction W à la fonction rationnelle (18) est indépendant de cette variable, et ainsi de suite. Ce rapport est donc indépendant des p variables (x_k, y_k), et l'on a

$$(19) \qquad W = E \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\psi(x_k, y_k)}{\varphi(x_k, y_k)},$$

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 204.

E étant une constante. On déterminera cette constante en attribuant aux variables (x_k, y_k) des valeurs particulières. Si, par exemple, on suppose que les p points (x_k, y_k) coïncident avec le point (x_0, y_0), origine des intégrales abéliennes, on a

$$(20) \qquad \mathrm{E} = \left[\frac{\varphi(x_0, y_0)}{\psi(x_0, y_0)}\right]^p \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta[u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) + \mathrm{C}_i]}{\Theta[u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) + \mathrm{C}_i]}.$$

Remarquons que, en vertu de la relation (17), la fonction W, définie par la formule (15), ne change pas quand on y remplace les constantes C_i par des valeurs équivalentes, c'est-à-dire différant des premières de multiples des périodes correspondantes.

96. *Corollaire.* — Supposons que les deux lignes $\varphi = 0$, $\psi = 0$ se réduisent à deux droites de la forme $x - \xi = 0$, $x - \xi' = 0$, ξ et ξ' étant des constantes. La première droite coupe la courbe $\mathrm{F}(x, y) = 0$ en m points (ξ, η_h), la seconde en m points (ξ', η'_h), η_h et η'_h désignant les racines de l'équation $\mathrm{F}(x, y) = 0$ pour $x = \xi$ ou $x = \xi'$. La fonction (15) devient dans ce cas

$$(21) \qquad \mathrm{W} = \prod_{h=1}^{h=m} \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi', \eta'_h) - \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi, \eta_h) - \mathrm{C}_i\right]},$$

et l'on a

$$(22) \qquad \mathrm{W} = \mathrm{E} \prod_{k=1}^{k=p} \frac{x_k - \xi'}{x_k - \xi},$$

$$(23) \qquad \mathrm{E} = \left(\frac{x_0 - \xi}{x_0 - \xi'}\right)^p \prod_{h=1}^{h=m} \frac{\Theta[u^{(i)}(\xi', \eta'_h) + \mathrm{C}_i]}{\Theta[u^{(i)}(\xi, \eta_h) + \mathrm{C}_i]}.$$

CHAPITRE XIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES.

Expression des fonctions abéliennes.

97. Nous avons mis les équations différentielles abéliennes (n° **60**) sous la forme finie

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) = u_i,$$

en désignant par $u^{(i)}(x, y)$ les p intégrales abéliennes normales de première espèce et en supposant que, lorsque les variables u_i sont égales à zéro, les p fonctions intégrales (x_k, y_k) coïncident avec l'origine (x_0, y_0) des intégrales abéliennes. Nous avons démontré qu'à tout système de valeurs des variables u_i, excepté celles pour lesquelles il y a indétermination, correspond un seul système de points (x_k, y_k), qui se permutent les uns dans les autres.

Dans le sens général, une *fonction abélienne* est une fonction rationnelle et symétrique des p valeurs d'une fonction rationnelle de x et y en ces p points (x_k, y_k). Soit

$$(2)\qquad z = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes entiers en x et y; les p valeurs de la fraction sont

$$z_1 = \frac{\psi(x_1, y_1)}{\varphi(x_1, y_1)}, \quad z_2 = \frac{\psi(x_2, y_2)}{\varphi(x_2, y_2)}, \quad \ldots, \quad z_p = \frac{\psi(x_p, y_p)}{\varphi(x_p, y_p)}.$$

Une fonction rationnelle et symétrique de ces p valeurs de z n'admet qu'une seule valeur pour chaque système de valeurs des variables u_i;

c'est donc une fonction méromorphe de ces variables, à l'exception des valeurs pour lesquelles il y a indétermination; elle reprend la même valeur, quand on augmente simultanément les variables u_i des mêmes multiples de $2p$ périodes correspondantes.

Cette fonction s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation

$$(3) \qquad z^p - \Phi_1 z^{p-1} + \Phi_2 z^{p-2} - \ldots + (-1)^p \Phi_p = 0,$$

dont les racines sont les p valeurs de z, c'est-à-dire à l'aide des p fonctions symétriques élémentaires

$$(4) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_p, \\ \Phi_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_p = z_1 z_2 \ldots z_p. \end{cases}$$

Il suffit donc de trouver les expressions de ces dernières fonctions.

98. Considérons d'abord le cas où les deux polynômes entiers $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, qui composent la fraction rationnelle z, sont du même degré n. La fonction

$$W = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]},$$

étudiée au n° 95, a été formée à l'aide des points où les courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$ coupent la courbe proposée $F = 0$. Concevons que la seconde courbe $\psi = 0$ soit remplacée par la courbe du même degré $\varphi + \lambda\psi = 0$, λ étant un paramètre arbitraire, et que, $u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ désignant toujours les valeurs des intégrales abéliennes aux points d'intersection des courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$, $u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ soient les valeurs qu'acquièrent ces intégrales aux points d'intersection des courbes $F = 0$ et $\varphi + \lambda\psi = 0$, quand le paramètre λ varie d'une manière continue à partir de zéro.

Dans cette fonction, les p points variables (x_k, y_k) sont quelconques; si ces points sont précisément ceux qui satisfont aux équations abéliennes (1), la fonction se change en une fonction

$$(5) \qquad \mathrm{W}(u_i) = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - \mathrm{C}_i]}{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - \mathrm{C}_i]}$$

des p variables u_i, et l'équation (19) du n° 95 devient

$$(6) \qquad \prod_{k=1}^{k=p} \left[1 + \lambda \frac{\psi(x_k, y_k)}{\varphi(x_k, y_k)}\right] = \frac{1}{\mathrm{E}} \mathrm{W}(u_i).$$

En faisant coïncider les p points (x_k, y_k) avec le point (x_0, y_0), on obtient la valeur de la constante

$$(7) \qquad \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{1}{\mathrm{W}(0)} \left[1 + \lambda \frac{\psi(x_0, y_0)}{\varphi(x_0, y_0)}\right]^p.$$

La fonction $\mathrm{W}(u_i)$, définie par la formule (5), est une fonction méromorphe des variables u_i, qui reprend la même valeur, quand on les augmente simultanément des mêmes multiples de 2p périodes correspondantes. Comme elle est égale, d'après l'équation (6), à une fonction entière et symétrique des p valeurs de la fraction rationnelle $\frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$, c'est une *fonction abélienne*.

Si l'on développe le produit indiqué dans le premier membre, l'équation (6) se met sous la forme

$$(8) \qquad 1 + \lambda\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2 + \ldots + \lambda^p\Phi_p = \frac{1}{\mathrm{E}} \mathrm{W}(u_i).$$

En attribuant au paramètre λ successivement p valeurs différentes, et formant les fonctions $\mathrm{W}(u_i)$ correspondantes, on obtiendra p équations du premier degré, à p inconnues $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$. On en déduira les valeurs de ces inconnues exprimées par des fonctions linéaires de p fonctions $\mathrm{W}(u_i)$.

La même méthode s'applique lorsque le polynôme ψ est d'un degré moindre que φ; car la courbe $\varphi + \lambda\psi = 0$, que nous avons substituée

à la courbe $\psi = 0$, est du même degré que la courbe $\varphi = 0$. Si le polynôme φ était d'un degré moindre que ψ, on pourrait le regarder comme la limite d'un polynôme du même degré que ψ, ce qui ferait coïncider plusieurs points (ξ_h, η_h) avec le point $x = \infty$ sur la sphère. On pourrait aussi former l'équation dont les racines sont les p valeurs de la fraction $\frac{1}{z}$, ce qui ramène au cas précédent.

99. Il y a indétermination pour les valeurs des variables u_i comprises dans les formules

$$u_i = \gamma_i \equiv 2C_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k),$$

dans lesquelles entrent p — 2 quantités arbitraires α_k (n° 60). A chacun de ces systèmes de valeurs correspondent une infinité de valeurs des fonctions intégrales (x_k, y_k) des équations abéliennes (1); chacun de ces systèmes de points (x_k, y_k), dont l'un est arbitraire, est situé sur une courbe $Q = 0$, du degré $m - 3$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, et passant par les p — 2 points (α_k, β_k) (n° 56). Dans ce cas, les fonctions $W(u_i)$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; car les deux fonctions Θ, qui forment chacun des rapports

$$\frac{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i]}{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i]},$$

deviennent

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) + u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right],$$

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p-2} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) + u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right],$$

et s'annulent à la fois, en vertu du théorème IV. Quand les variables u_i tendent vers les valeurs γ_i, les valeurs des fonctions $W(u_i)$ sont indéterminées; elles dépendent des rapports des accroissements $u_i - \gamma_i$ à l'un d'eux, c'est-à-dire de p — 1 rapports arbitraires (¹).

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 168.

des p — 1 équations du premier degré

$$(12)\qquad \begin{cases} z_2^{p-1} + A_1 z_2^{p-2} + A_2 z_2^{p-3} + \ldots + A_{p-1} = 0, \\ z_3^{p-1} + A_1 z_3^{p-2} + A_2 z_3^{p-3} + \ldots + A_{p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_p^{p-1} + A_1 z_p^{p-2} + A_2 z_p^{p-3} + \ldots + A_{p-1} = 0, \end{cases}$$

à p — 1 inconnues A_1, A_2, ..., A_{p-1}. L'équation résultante se réduit à

$$Z_1(z_1^{p-1} + A_1 z_1^{p-2} + A_2 z_1^{p-3} + \ldots + A_{p-1}) = \Phi_1^{(p-1)} + A_1 \Phi_1^{(p-2)} + \ldots + A_{p-1}\Phi_1^{(0)}.$$

Les équations (12) montrent que A_1, A_2, ..., A_{p-1} sont les coefficients de l'équation du degré p — 1 qui a pour racines z_2, z_3, ..., z_p, équation que l'on obtient en divisant le premier membre de l'équation (3) par $z - z_1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} A_1 &= z_1 - \Phi_1, \\ A_2 &= z_1^2 - \Phi_1 z_1 + \Phi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p-1} &= z_1^{p-1} - \Phi_1 z_1^{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}, \end{aligned}$$

et l'on a

$$Z_1 = \frac{\Phi_1^{(p-1)} + A_1\Phi_1^{(p-2)} + A_2\Phi_1^{(p-3)} + \ldots + A_{p-1}\Phi_1^{(0)}}{z_1^{p-1} + A_1 z_1^{p-2} + A_2 z_1^{p-3} + \ldots + A_{p-1}}.$$

Comme z_1 désigne l'une quelconque des valeurs de z et Z_1 la valeur correspondante de Z, on en conclut que chacune des p valeurs de Z est égale à une fonction rationnelle de la valeur correspondante de z et de fonctions $W(u_i)$.

En remplaçant les quantités A_1, A_2, ..., A_{p-1} par leurs valeurs, on obtient la formule

$$(13)\quad Z = \frac{\left\{\begin{array}{c} \Phi_1^{(p-1)} + (z - \Phi_1)\Phi_1^{(p-2)} + (z^2 - \Phi_1 z + \Phi_2)\Phi_1^{(p-3)} + \ldots \\ + [z^{p-1} - \Phi_1 z^{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}]\Phi_1^{(0)} \end{array}\right\}}{p z^{p-1} - (p-1)\Phi_1 z^{p-2} + (p-2)\Phi_2 z^{p-3} - \ldots + (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}}.$$

Intégration des équations différentielles abéliennes.

101. L'intégration des équations différentielles abéliennes, que nous avons mises sous la forme finie (1)

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) = u_i,$$

se déduit de ce qui précède; car la question consiste en la détermination des p points (x_k, y_k), qui correspondent à un même système de valeurs des variables u_i. Formons d'abord l'équation

$$z^p - \Phi_1 z^{p-1} + \Phi_2 z^{p-2} - \ldots + (-1)^p \Phi_p = 0, \tag{14}$$

dont les racines sont les p valeurs de la fraction rationnelle

$$z = \frac{x}{x - \xi}, \tag{15}$$

dans laquelle ξ est une constante, ce qui revient à supposer que les deux polynômes φ et ψ sont du premier degré et de la forme $\varphi = x - \xi$, $\psi = x$; la droite $\varphi = 0$ coupe la courbe $F = 0$ en m points (ξ, η_h), la droite $\varphi + \lambda\psi = 0$ en m points (ξ', η'_h), ξ' désignant la quantité $\frac{\xi}{1+\lambda}$. Attribuant au paramètre λ successivement p valeurs, on formera p fonctions abéliennes de la forme

$$W(u_i) = \prod_{h=1}^{h=m} \frac{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi', \eta'_h) - C_i]}{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi, \eta_h) - C_i]}, \tag{16}$$

d'où l'on déduira, à l'aide des équations (8), les coefficients de l'équation (14), exprimés par des fonctions linéaires de ces p fonctions $W(u_i)$. En remplaçant ensuite dans cette équation z par sa valeur (15), on obtiendra l'équation

$$x^p - \varphi_1 x^{p-1} + \varphi_2 x^{p-2} - \ldots + (-1)^p \varphi_p = 0, \tag{17}$$

dont les racines sont les p quantités x_k, qui correspondent à un même système de valeurs des variables u_i, ou les p fonctions intégrales des équations différentielles (n° 60).

Il reste maintenant à déterminer la valeur y_k qui se rapporte à x_k. D'après le théorème général démontré au n° 100, chaque valeur de la fraction

$$Z = \frac{y}{y - \eta}, \tag{18}$$

dans laquelle η désigne une constante, est égale à une fonction rationnelle de la valeur correspondante de z et de fonctions $W(u_i)$; ayant formé cette fonction rationnelle d'après la méthode indiquée, on en déduira l'expression de y par une fonction rationnelle de la valeur correspondante de x et des mêmes fonctions $W(u_i)$.

On peut obtenir directement l'équation (17) en faisant $\varphi = 1$, $\psi = x$; les m points (ξ, η_h) d'intersection de la droite $\varphi = 0$ et de la courbe $F = 0$ coïncident alors avec le point $x = \infty$ sur la sphère. Faisant ensuite $\Phi = 1$, $\Psi = y$, et formant les p équations qui admettent respectivement pour racines les p valeurs de

$$y, \quad yx, \quad yx^2, \quad \ldots, \quad yx^{p-1},$$

on en déduit l'expression de y.

Application aux fonctions ultra-elliptiques.

102. Dans ce cas, la droite $x - \xi = 0$ coupe la courbe $F = 0$ en deux points symétriques (ξ, η), $(\xi, -\eta)$, la droite $x - \xi' = 0$ en deux autres points symétriques (ξ', η'), $(\xi', -\eta')$. La fonction (16) se réduit à

$$W(u_i) = \frac{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi', \eta') - C_i]\,\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi', -\eta') - C_i]}{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi, \eta) - C_i]\,\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi, -\eta) - C_i]}. \tag{19}$$

Nous prendrons

$$u^{(i)}(\xi, -\eta) = \mathcal{A}_1^{(i)} - u^{(i)}(\xi, \eta),$$
$$u^{(i)}(\xi', -\eta') = \mathcal{A}_1^{(i)} - u^{(i)}(\xi', \eta'),$$

de manière à satisfaire à la condition

$$u^{(i)}(\xi', \eta') + u^{(i)}(\xi', -\eta') = u^{(i)}(\xi, \eta) + u^{(i)}(\xi, -\eta),$$

nécessaire pour que la fonction, considérée comme une fonction des points (x_k, y_k), soit monotrope.

On simplifie le calcul en faisant passer la première droite par le point critique a_1 et la seconde par un point critique a_{2q}, à indice pair. On a alors

$$u^{(i)}(\xi, \eta) = u^{(i)}(\xi, -\eta) = \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)},$$
$$u^{(i)}(\xi', \eta') = \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)}, \quad u^{(i)}(\xi', -\eta') = \mathcal{A}_1^{(i)} - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)};$$

la fonction (19) devient

$$(20) \quad \mathrm{W}(u_i) = \frac{\Theta[u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)} - \mathrm{C}_i]\,\Theta[u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)} - \mathrm{C}_i - (\mathcal{A}_1^{(i)} - \mathcal{A}_{2q}^{(i)})]}{[\Theta(u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)} - \mathrm{C}_i)]^2}.$$

Puisque

$$\mathcal{A}_1^{(i)} - \mathcal{A}_{2q}^{(i)} = \Omega_{2q-1}^{(i)} + 2\sum_{h=1}^{h=q-1} \alpha_{ih},$$

le second facteur du numérateur est égal au premier multiplié par une exponentielle; la fonction se met sous la forme

$$(21) \quad \mathrm{W}(u_i) = e^{\sum\limits_{i=1}^{i=q-1}(u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)} - \mathrm{C}_i) - \sum\limits_{i=1}^{i=q-1}\sum\limits_{k=1}^{k=q-1}\alpha_{ik}} \times \left[\frac{\Theta(u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)} - \mathrm{C}_i)}{\Theta(u_i - \frac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)} - \mathrm{C}_i)}\right]^2,$$

et l'on a, d'après l'équation (22) du n° 96,

$$(22) \quad \mathrm{W}(u_i) = \mathrm{E}\prod_{k=1}^{k=p} \frac{x_k - a_{2q}}{x_k - a_1} = \frac{a_{2q}}{a_1}\mathrm{E}\prod_{k=1}^{k=p}\left(1 + \lambda\frac{x_k}{x_k - a_1}\right),$$

en attribuant au paramètre λ la valeur $\lambda = \frac{a_1 - a_{2q}}{a_{2q}}$. En faisant passer la seconde droite successivement par les p points critiques $a_2, a_4, \ldots, a_{2p}$, on obtiendra p équations de la forme (8), d'où l'on déduira les coefficients de l'équation ayant pour racines les p valeurs de la fraction $z = \frac{x}{x - a_1}$.

103. La détermination de la constante E se fait ici très-simplement. Imaginons que les p points (x_k, y_k) coïncident respectivement avec les points critiques $a_3, a_5, \ldots, a_{2p+1}$; on aura

$$u_i = \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_3^{(i)} + \mathcal{A}_5^{(i)} + \ldots + \mathcal{A}_{2p+1}^{(i)}) = \mathrm{H}_i - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)}.$$

Si l'on adopte les valeurs

$$\mathrm{C}_i = \mathrm{H}_i - \mathcal{A}_1^{(i)}$$

des constantes C_i (n° 86), on en déduit

$$u_i - \mathrm{C}_i = \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)},$$

et la fonction $\mathrm{W}(u_i)$, représentée par la formule (20), acquiert la valeur

$$(23)\quad \left[\frac{\Theta(\frac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)} - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)})}{\Theta(0)}\right]^2 = \mathrm{E}\,\frac{(a_3 - a_{2q})(a_5 - a_{2q})\ldots(a_{2p+1} - a_{2q})}{(a_3 - a_1)\ (a_5 - a_1)\ldots\ (a_{2p+1} - a_1)}.$$

Concevons maintenant que les p points (x_k, y_k) coïncident respectivement avec les points critiques à indices pairs, excepté a_{2q}, on aura

$$u_i = \mathrm{H}_i - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)},\quad u_i - \mathrm{C}_i = \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)},$$

en adoptant les valeurs

$$\mathrm{C}_i = \mathrm{H}_i - \mathcal{A}_{2q}^{(i)}$$

des constantes C_i; on en déduit, d'après la formule (21),

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=q-1}\sum\limits_{k=1}^{k=q-1}\alpha_{ik}} \times \left[\frac{\Theta(0)}{\Theta\left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_1^{(i)} - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{2q}^{(i)}\right)}\right]^2 \\ & = E\,\frac{(a_2-a_{2q})(a_3-a_{2q})\ldots(a_{2q-2}-a_{2q})(a_{2q+2}-a_{2q})\ldots(a_{2p+2}-a_{2q})}{(a_2-a_1)\ (a_3-a_1)\ldots\ (a_{2q-2}-a_1)\ (a_{2q+2}-a_1)\ldots\ (a_{2p+2}-a_1)}. \end{aligned} \right.$$

En multipliant les deux relations (23) et (24) membre à membre, on arrive à l'expression

$$(25) \qquad E^2 = e^{-\sum\limits_{i=1}^{i=q-1}\sum\limits_{k=1}^{k=q-1}\alpha_{ik}} \prod \frac{a_h - a_1}{a_h - a_{2q}},$$

dans laquelle on attribue à l'indice h les valeurs consécutives 1, 2, 3, ..., $2p+2$, excepté $h=1$ et $h=2q$.

NOTE A.

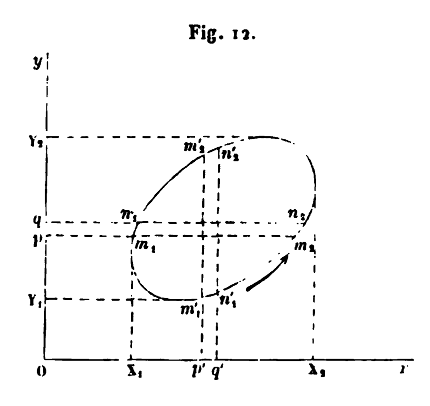
SUR LE THÉORÈME DE GREEN.

Le théorème de Green se rapporte à la transformation des intégrales triples, en vue de l'étude des phénomènes électriques; mais il nous suffit ici de l'appliquer à la transformation d'une intégrale double. Soient U et V deux fonctions réelles des deux variables réelles x et y, fonctions continues, monotropes, et ayant des dérivées partielles continues, dans une partie du plan à contour simple. Considérons l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{1}$$

s'étendant à la partie du plan limitée par une courbe intérieure et infiniment voisine du contour, et supposons d'abord que cette courbe

Fig. 12.



soit convexe (*fig.* 12). Cette intégrale double est égale à la somme des deux intégrales doubles

$$\iint \frac{\partial V}{\partial x}\, dx\, dy, \quad -\iint \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\, dy.$$

La première peut être mise sous la forme

$$\int_{Y_1}^{Y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x} dx = \int_{Y_1}^{Y_2} (V_2 - V_1)\, dy,$$

Y_1 et Y_2 étant les ordonnées des deux tangentes à la courbe, parallèles à l'axe Ox, x_1 et x_2 les abscisses des deux points m_1 et m_2, où une parallèle à Ox, menée à une distance y comprise entre Y_1 et Y_2, coupe la courbe, V_1 et V_2 les valeurs de la fonction V aux points m_1 et m_2. Le second membre n'est autre chose que l'intégrale simple

$$(2) \qquad \int V\, dy,$$

étendue à la courbe entière, décrite dans le sens positif; car à un même élément pq de la droite $Y_1 Y_2$ correspondent deux éléments $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ de la courbe; quand un observateur décrit la courbe dans le sens positif, c'est-à-dire de manière à avoir l'aire enveloppée à sa gauche, la différentielle dy est positive pour l'élément $m_2 n_2$, négative pour l'élément $m_1 n_1$, ce qui donne les deux éléments $(V_2 - V_1).pq$.

La seconde intégrale double se mettra de même sous la forme

$$-\int_{X_1}^{X_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int_{X_1}^{X_2} (U_1 - U_2)\, dx,$$

X_1 et X_2 étant les abscisses des deux tangentes parallèles à l'axe Oy, y_1 et y_2 les ordonnées des deux points m'_1 et m'_2, où une parallèle à Oy, menée à une distance x comprise entre X_1 et X_2, coupe la courbe, U_1 et U_2 les valeurs de la fonction U aux points m'_1 et m'_2. Le second membre n'est autre chose que l'intégrale

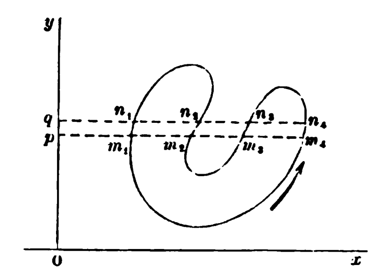
$$(3) \qquad \int U\, dx,$$

étendue à la courbe entière, décrite aussi dans le sens positif. On a donc

$$(4) \qquad \int\int \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (U\, dx + V\, dy).$$

La même transformation s'opère quelle que soit la forme de la courbe fermée; car, pour la première intégrale double, une parallèle à Ox rencontrant la courbe en un nombre pair de points, par exemple en quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 (*fig.* 13), il faudra intégrer par rapport

Fig. 13.



à x de m_1 à m_2, puis de m_3 à m_4, ce qui donnera les quatre éléments différentiels $[(V_2 - V_1) + (V_4 - V_3)].pq$. L'intégrale (2) étendue à la courbe entière, décrite dans le sens positif, donnera ces quatre éléments avec leurs signes. On ramène de même, dans tous les cas, la seconde intégrale double à l'intégrale (3).

La formule (4) donne une démonstration très-simple du théorème de Cauchy (Introduction, n° 13). Voici une autre conséquence de la même formule. Si l'on y remplace V par $V\frac{\partial V}{\partial x}$ et U par $-U\frac{\partial U}{\partial y}$, elle devient

$$(5)\quad \int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]dx\,dy=\int\left(V\frac{\partial V}{\partial x}dy-U\frac{\partial U}{\partial y}dx\right).$$

En y faisant ensuite $U = V = X$, on a

$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2+X\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)\right]dx\,dy=\int X\left(-\frac{\partial X}{\partial y}dx+\frac{\partial X}{\partial x}dy\right).$$

La quantité $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$ étant nulle, et les quantités $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial x}$ pouvant être remplacées dans le second membre par les quantités respective-

ment égales $-\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$, cette équation se réduit à

$$(6)\qquad \int\int\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int X\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)=\int X\,dY.$$

On en conclut que, *lorsqu'une fonction $f(z)=X+Y\sqrt{-1}$ est holomorphe dans une portion du plan à contour simple, l'intégrale*

$$(7)\qquad \int X\,dY,$$

prise sur le contour de l'aire, ou sur une courbe intérieure infiniment voisine, dans le sens positif, a une valeur positive et différente de zéro.

NOTE B.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS.

Étant donnée une équation algébrique irréductible $F(x, y) = 0$, *du degré m, toute fonction analytique et monotrope v du point* (x, y), *et qui, sur toute la sphère relative à la variable x, n'admet pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, est égale à une fonction rationnelle de x et y.*

A chaque valeur de x correspondent m valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de y, et, par conséquent, m valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de la fonction v. On suppose que, sur toute la sphère, les m branches de la fonction v sont holomorphes dans le voisinage de chacune des valeurs de x, excepté dans le voisinage de certains points singuliers. On suppose, en outre, qu'il n'y a pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, qui sont ici ceux de la fonction algébrique y de x, définie par l'équation proposée $F(x, y) = 0$; on en conclut que v est une fonction algébrique de x (¹). Nous allons démontrer que cette fonction peut s'exprimer rationnellement à l'aide de x et y.

Les sommes

$$(1) \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_m = P_0, \\ v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_m y_m = P_1, \\ v_1 y_1^2 + v_2 y_2^2 + \ldots + v_m y_m^2 = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_1 y_1^{m-1} + v_2 y_2^{m-1} + \ldots + v_m y_m^{m-1} = P_{m-1}, \end{cases}$$

n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de x, et étant méromorphes

(¹) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 216.

sur toute la sphère, sont égales à des fractions rationnelles de x [1]; nous désignons ces fractions rationnelles par $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$.

Multiplions les deux membres de ces égalités respectivement par les indéterminées $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots, A_1, 1$, ajoutons les résultats et égalons à zéro les coefficients de $v_2, v_3, \ldots, v_m$, ce qui donne le système des $m-1$ équations du premier degré

$$(2)\quad \begin{cases} y_2^{m-1} + A_1 y_2^{m-2} + A_2 y_2^{m-3} + \ldots + A_{m-1} = 0, \\ y_3^{m-1} + A_1 y_3^{m-2} + A_2 y_3^{m-3} + \ldots + A_{m-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m^{m-1} + A_1 y_m^{m-2} + A_2 y_m^{m-3} + \ldots + A_{m-1} = 0, \end{cases}$$

à $m-1$ inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$. L'équation résultante se réduit à

$$(3)\quad v_1(y_1^{m-1} + A_1 y_1^{m-2} + A_2 y_1^{m-3} + \ldots + A_{m-1}) = P_{m-1} + A_1 P_{m-2} + \ldots + A_{m-1} P_0.$$

Les équations (2) montrent que les quantités $1, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sont proportionnelles aux coefficients de l'équation du degré $m-1$, dont les racines sont $y_2, y_3, \ldots, y_m$. On formera cette équation en divisant par $y - y_1$ le premier membre de l'équation proposée $F(x, y) = 0$, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de y. Soit

$$F(x, y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \ldots + X_m,$$

$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$ étant des polynômes entiers en x. En effectuant la division de ce polynôme par $y - y_1$, on a

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = X_0 y^{m-1} + (X_0 y_1 + X_1) y^{m-2} + (X_0 y_1^2 + X_1 y_1 + X_2) y^{m-3} + \ldots + (X_0 y_1^{m-1} + X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{X_0 y_1 + X_1}{X_0}, \\ A_2 &= \frac{X_0 y_1^2 + X_1 y_1 + X_2}{X_0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m-1} &= \frac{X_0 y_1^{m-1} + X_1 y_1^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}{X_0}. \end{aligned}$$

---

(1) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 206.

De l'équation (3) on tire

$$(4)\qquad v_1 = \frac{P_{m-1} + A_1 P_{m-2} + A_2 P_{m-3} + \ldots + A_{m-1} P_0}{y_1^{m-1} + A_1 y_1^{m-2} + A_2 y_1^{m-3} + \ldots + A_{m-1}}.$$

Les quantités P_0, P_1, ..., P_{m-1} étant des fonctions rationnelles de x, les quantités A_1, A_2, ..., A_{m-1} des fonctions rationnelles de x et y_1, on en conclut que la valeur v_1 est égale à une fonction rationnelle de x et de y_1. Comme y_1 désigne l'une quelconque des valeurs de y et v_1 la valeur correspondante de v, il en résulte que la fonction analytique et monotrope v du point (x, y) est égale à une fonction rationnelle de x et y.

En remplaçant, dans la formule (4), A_1, A_2, ..., A_{m-1} par leurs valeurs, on obtient l'expression

$$(5)\quad v = \frac{X_0 P_{m-1} + (X_0 y + X_1) P_{m-2} + \ldots + (X_0 y^{m-1} + X_1 y^{m-2} + \ldots + X_{m-1}) P_0}{m X_0 y^{m-1} + (m-1) X_1 y^{m-2} + \ldots + X_{m-1}}.$$

Le dénominateur est la dérivée partielle du polynôme $F(x, y)$ par rapport à y. On sait qu'à l'aide de l'équation $F(x, y) = 0$ toute fraction rationnelle de x et de y peut être transformée en une autre, dont le dénominateur est indépendant de y.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION ET NOMBRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE II.

DES DEUX ESPÈCES DE LACETS.

CHAPITRE III.

PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

CHAPITRE IV.

RELATION ENTRE LES PÉRIODES DE DEUX INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE V.

PÉRIODES NORMALES.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

THÉORÈME D'ABEL.

SECONDE PARTIE.

FONCTIONS ABÉLIENNES.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Pages

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES.

CHAPITRE X.

LA FONCTION Θ.

CHAPITRE XI.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\Theta[u^{(i)}(x, y)]$.

CHAPITRE XII.

SUITE DES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $\Theta[u^{(i)}(x,y)]$.

CHAPITRE XIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES.

NOTE A.

SUR LE THÉORÈME DE GREEN.

NOTE B.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 79, au lieu de :

Existence des fonctions intégrales de deux équations différentielles a deux variables indépendantes,

mettez :

Existence de la fonction intégrale d'une équation différentielle à deux variables indépendantes.

Page 85, lignes 3 et 2 en remontant, au lieu de :

Existence des fonctions intégrales de p équations différentielles à p variables indépendantes,

mettez :

Existence des fonctions intégrales de n équations différentielles à p variables indépendantes.

4353 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

